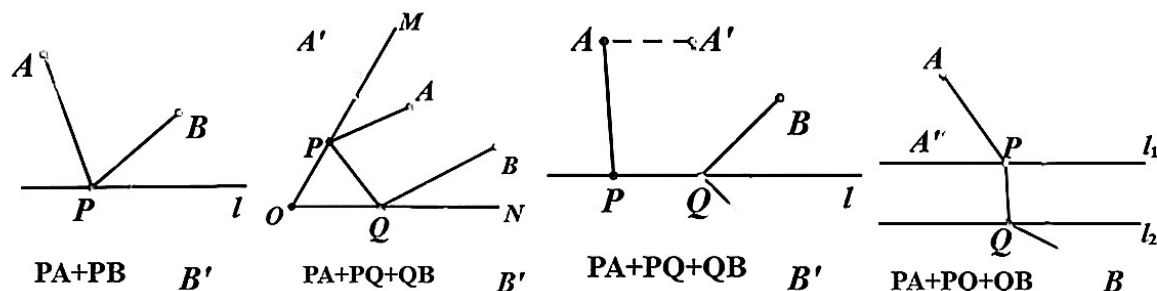


【模型解析】



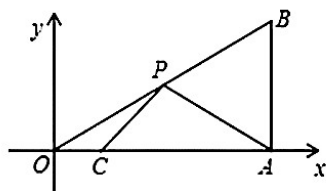
总结：以上四图为常见的轴对称类最短路径问题，最后都转化到：“两点之间，线段最短”解决。

特点：①动点在直线上；②起点，终点固定；

方法：作定点关于动点所在直线的对称点。

【例题分析】

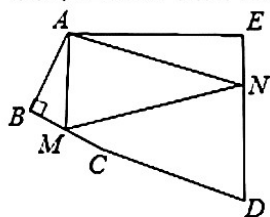
例 1. 如图，在平面直角坐标系中， $\text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上，顶点 B 的坐标为 $(3, \sqrt{3})$ ，点 C 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，点 P 为斜边 OB 上的一动点，则 $PA+PC$ 的最小值为_____。



例 2. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中， $\angle BAE=120^\circ$ ， $\angle B=\angle E=90^\circ$ ， $AB=BC=1$ ， $AE=DE=2$ ，在 BC 、 DE 上分别找一点 M 、 N 。

(1) 当 $\triangle AMN$ 的周长最小时， $\angle AMN + \angle ANM =$ _____；

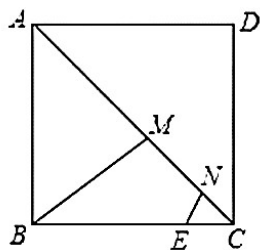
(2) 求 $\triangle AMN$ 的周长最小值。



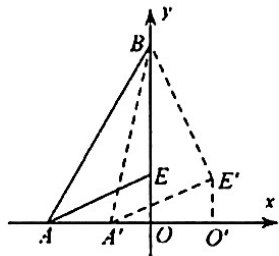
例 3. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 在边 BC 上且 $CE=1$ ，长为 $\sqrt{2}$ 的线段 MN 在 AC 上运动。

(1) 求四边形 $BMNE$ 周长最小值；

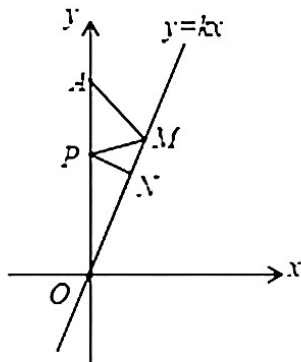
(2) 当四边形 $BMNE$ 的周长最小时，则 $\tan \angle MBC$ 的值为_____。



例 4. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-2, 0)$, 点 $B(0, 4)$, 点 E 在 OB 上, 且 $\angle OAE = \angle OBA$. 如图, 将 $\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle AE'O'$, 连接 $A'B$ 、 BE' . 当 $AB + BE'$ 取得最小值时, 求点 E' 的坐标.



例 5. 如图, 已知正比例函数 $y=kx (k>0)$ 的图像与 x 轴相交所成的锐角为 70° , 定点 A 的坐标为 $(0, 4)$, P 为 y 轴上的一个动点, M 、 N 为函数 $y=kx (k>0)$ 的图像上的两个动点, 则 $AM + MP + PN$ 的最小值为_____.



【巩固训练】

1. (2021·枣庄) 如图 1, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC , BD 相交于点 O , $AC = 6\sqrt{3}$, $BD = 6$, 点 P 是 AC 上一动点, 点 E 是 AB 的中点, 则 $PD + PE$ 的最小值为()

A. $3\sqrt{3}$

B. $6\sqrt{3}$

C. 3

D. $6\sqrt{2}$

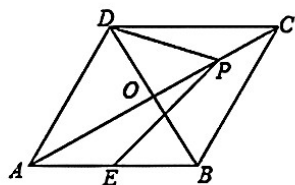


图 1

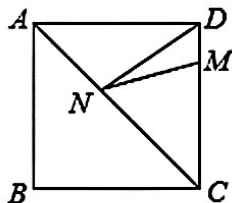


图 2

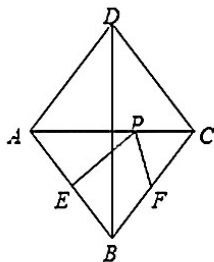


图 3

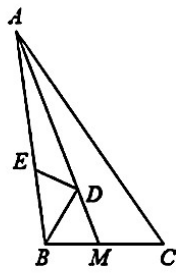


图 4

2. (2021·青海) 如图 2, 正方形 $ABCD$ 的边长为 8, 点 M 在 DC 上且 $DM = 2$, N 是 AC 上的一动点, 则 $DN + MN$ 的最小值是_____.

3. 如图 3, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 $AC = 6$, $BD = 8$, 点 E 、 F 、 P 分别是边 AB 、 BC 、 AC 上的动点, $PE + PF$ 的最小值是_____.

4. 如图 4, 在 $\triangle ABC$ 中, AM 平分 $\angle BAC$, 点 D 、 E 分别为 AM 、 AB 上的动点,

(1) 若 $AC = 4$, $S_{\triangle ABC} = 6$, 则 $BD + DE$ 的最小值为_____.

(2) 若 $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 8$, 则 $BD + DE$ 的最小值为_____.

(3) 若 $AB = 17$, $BC = 10$, $CA = 21$, 则 $BD + DE$ 的最小值为_____.

5. 如图 5, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=4$, $S_{\triangle ABC}=4\sqrt{3}$, 点 P 、 Q 、 K 分别为线段 AB 、 BC 、 AC 上任意一点, 则 $PK+QK$ 的最小值为_____.

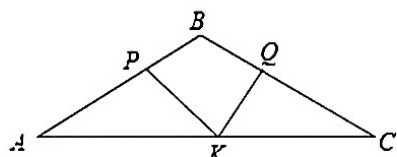


图 5

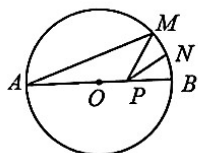


图 6

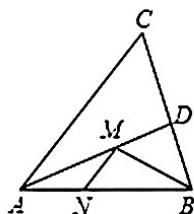


图 7

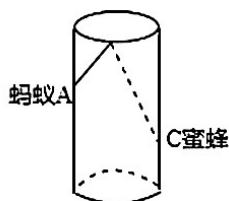


图 8

6. 如图 6, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AB=8$, 点 M 在 $\odot O$ 上, $\angle MAB=20^\circ$, N 是弧 MB 的中点, P 是直径 AB 上的一动点, 则 $PM+PN$ 的最小值为_____.

7. 如图 7, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $\angle BAC=45^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , M 、 N 分别是 AD 和 AB 上的动点, 则 $BM+MN$ 的最小值是_____.

8. 如图 8, 圆柱形玻璃杯高为 12cm、底面周长为 18cm, 在杯内离杯底 4cm 的点 C 处有一滴蜂蜜, 此时一只蚂蚁正好在杯外壁, 离杯上沿 4cm 与蜂蜜相对的点 A 处, 则蚂蚁到达蜂蜜的最短距离为_____cm.

9. 如图 9, 菱形 $OABC$ 中, 点 A 在 x 轴上, 顶点 C 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 动点 D 、 E 分别在射线 OC 、 OB 上, 则 $CE+DE+DB$ 的最小值是_____.

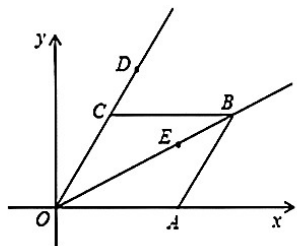


图 9

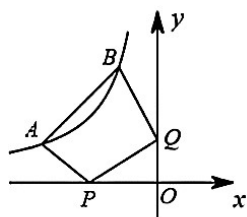


图 10

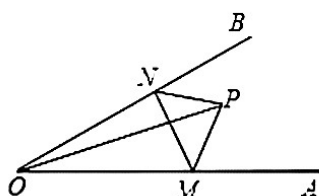


图 11

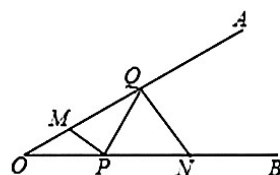


图 12

10. 如图 10, 点 $A(a, 1)$ 、 $B(-1, b)$ 都在双曲线 $y = -\frac{3}{x}$ ($x < 0$) 上, 点 P 、 Q 分别是 x 轴、 y 轴上的动点, 当四边形 $PABQ$ 的周长取最小值时, PQ 所在直线的解析式是_____.

11. 如图 11, 点 P 是 $\angle AOB$ 内任意一点, $OP=5\text{cm}$, 点 M 和点 N 分别是射线 OA 和射线 OB 上的动点, $\triangle PMN$ 周长的最小值是 5cm, 则 $\angle AOB$ 的度数是_____.

12. 如图 12, $\angle AOB=30^\circ$, 点 M 、 N 分别在边 OA 、 OB 上, 且 $OM=1$, $ON=3$, 点 P 、 Q 分别在边 OB 、 OA 上, 则 $MP+PQ+QN$ 的最小值是_____.

13. (2021·聊城) 如图 13, 在直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点, 顶点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上, B 、 D 两点坐标分别为 $B(-4, 6)$, $D(0, 4)$, 线段 EF 在边 OA 上移动, 保持 $EF=3$, 当四边形 $BDEF$ 的周长最小时, 点 E 的坐标为_____.

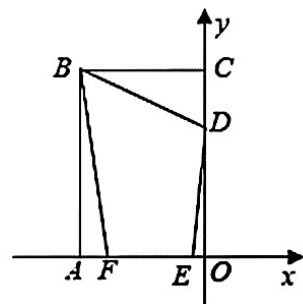


图 13

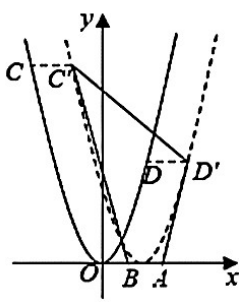


图 14

14. (2021·广西) 如图, 已知点 $A(3,0)$, $B(1,0)$, 两点 $C(-3,9)$, $D(2,4)$ 在抛物线 $y=x^2$ 上, 向左或向右平移抛物线后, C , D 的对应点分别为 C' , D' . 当四边形 $ABC'D'$ 的周长最小时, 抛物线的解析式为 _____.

15. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=8$, G 为边 AD 的中点.

(1) 如图 15-1, 若 E 为 AB 上的一个动点, 当 $\triangle CGE$ 的周长最小时, 求 AE 的长.

(2) 如图 15-2, 若 E 、 F 为边 AB 上的两个动点, 且 $EF=4$, 当四边形 $CGEF$ 的周长最小时, 求 AF 的长.

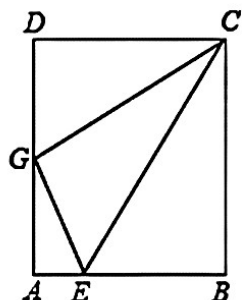


图 15-1

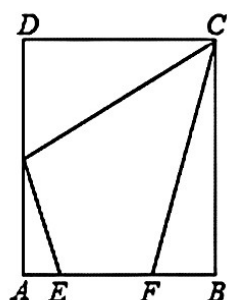


图 15-2

16. 如图 16, 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+4$ 交 y 轴于点 B , 点 A 为 x 轴上的一点, $OA=2$, 过点 A 作直线 $MN \perp AB$ 交抛物线于 M 、 N 两点.

(1) 求直线 AB 的解析式;

(2) 将线段 AB 沿 y 轴负方向平移 t 个单位长度, 得到线段 A_1B_1 , 求 MA_1+MB_1 取最小值时实数 t 的值.

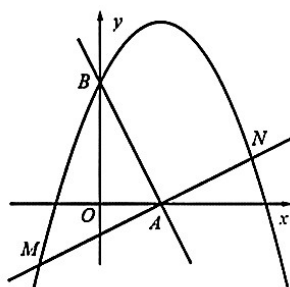
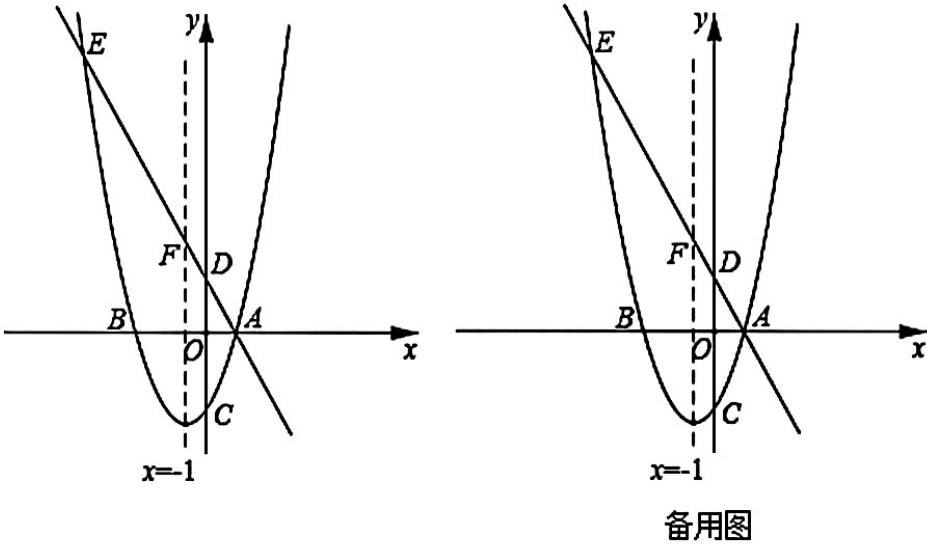


图 16

17. (2021·遂宁) 如图，已知二次函数的图象与 x 轴交于 A 和 $B(-3,0)$ 两点，与 y 轴交于 $C(0,-3)$ ，对称轴为直线 $x=-1$ ，直线 $y=-2x+m$ 经过点 A ，且与 y 轴交于点 D ，与抛物线交于点 E ，与对称轴交于点 F 。

- (1) 求抛物线的解析式和 m 的值；
- (2) 在 y 轴上是否存在点 P ，使得以 D 、 E 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle AOD$ 相似，若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，试说明理由；
- (3) 直线 $y=1$ 上有 M 、 N 两点 (M 在 N 的左侧)，且 $MN=2$ ，若将线段 MN 在直线 $y=1$ 上平移，当它移动到某一位置时，四边形 $MEFN$ 的周长会达到最小，请求出周长的最小值 (结果保留根号)。



18. (2021•鄂州) 如图, 直线 $y = -\frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 B , 与 y 轴交于点 A , 点 P 为线段 AB 的中点, 点 Q 是线段 OA 上一动点 (不与点 O 、 A 重合).

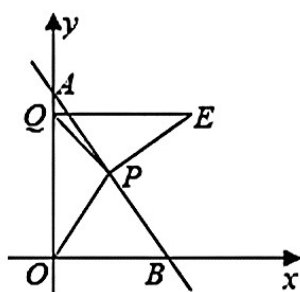
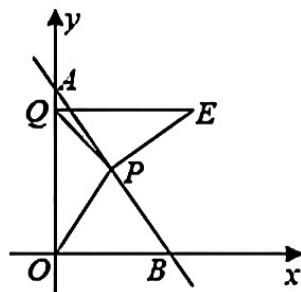
(1) 请直接写出点 A 、点 B 、点 P 的坐标;

(2) 连接 PQ , 在第一象限内将 $\triangle OPQ$ 沿 PQ 翻折得到 $\triangle EPQ$, 点 O 的对应点为点 E . 若 $\angle OQE = 90^\circ$, 求线段 AQ 的长;

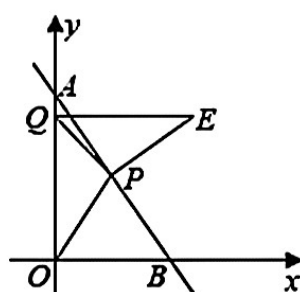
(3) 在 (2) 的条件下, 设抛物线 $y = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a + 1 (a \neq 0)$ 的顶点为点 C .

①若点 C 在 $\triangle PQE$ 内部 (不包括边), 求 a 的取值范围;

②在平面直角坐标系内是否存在点 C , 使 $|CQ - CE|$ 最大? 若存在, 请直接写出点 C 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



备用图1



备用图2