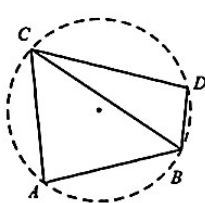
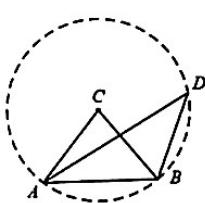
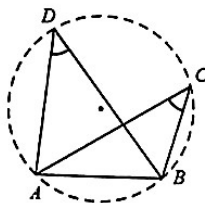
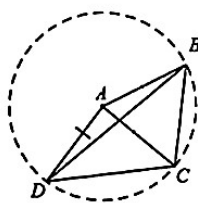


## 【模型讲解】

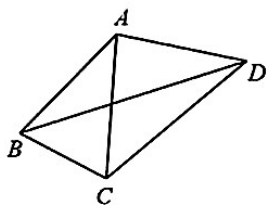
常见的隐圆模型有：(1) 动点到定点的距离为定长；(2) 四点共圆；(3) 定边对定角（专题 3）等。



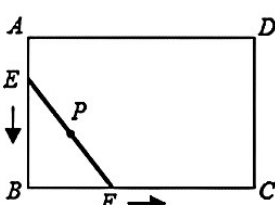
$$AD=AC=AB \quad \angle ADB=\angle ACB \quad 2\angle ADB=\angle ACB \quad \angle BAC+\angle BDC=180^\circ$$

## 【例题分析】

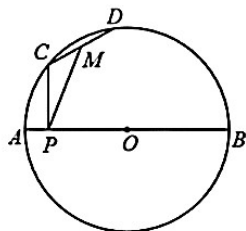
例 1. 如图，已知  $AB=AC=AD$ ， $\angle CBD=2\angle BDC$ ， $\angle BAC=44^\circ$ ，则  $\angle CAD$  的度数为\_\_\_\_\_。



例 1 图



例 2 图



例 3 图

例 2. 在矩形  $ABCD$  中，已知  $AB=2\text{cm}$ ， $BC=3\text{cm}$ ，现有一根长为  $2\text{cm}$  的木棒  $EF$  紧贴着矩形的边（即两个端点始终落在矩形的边上），按逆时针方向滑动一周，则木棒  $EF$  的中点  $P$  在运动过程中所围成的图形的面积为\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ 。

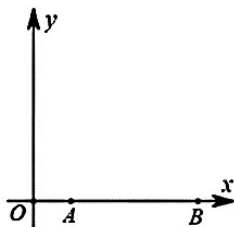
例 3. 如图，定长弦  $CD$  在以  $AB$  为直径的  $\odot O$  上滑动（点  $C$ 、 $D$  与点  $A$ 、 $B$  不重合）， $M$  是  $CD$  的中点，过点  $C$  作  $CP \perp AB$  于点  $P$ ，若  $AB=8$ ，则  $PM$  的最大值是\_\_\_\_\_。

例 4. 如图，点  $A$  与点  $B$  的坐标分别是  $(1, 0)$ ， $(5, 0)$ ，点  $P$  是该直角坐标系内的一个动点。

(1) 使  $\angle APB=30^\circ$  的点  $P$  有\_\_\_\_\_个；

(2) 若点  $P$  在  $y$  轴上，且  $\angle APB=30^\circ$ ，求满足条件的点  $P$  的坐标；

(3) 当点  $P$  在  $y$  轴上移动时， $\angle APB$  是否存在最大值？若存在，求点  $P$  的坐标；若不存在，请说明理由。



# 【巩固训练】

1. 如图1, 矩形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $AD=3$ , 点  $E$ 、 $F$  分别  $AD$ 、 $DC$  边上的点, 且  $EF=2$ , 点  $G$  为  $EF$  的中点, 点  $P$  为  $BC$  上一动点, 则  $PA+PG$  的最小值为\_\_\_\_\_.

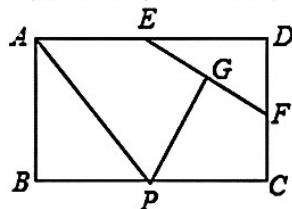


图1

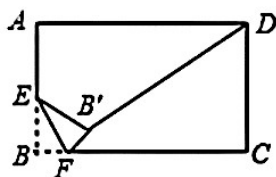


图2

2. 如图2, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=4$ ,  $AD=6$ ,  $E$  是  $AB$  边的中点,  $F$  是线段  $BC$  边上的动点, 将  $\triangle EBF$  沿  $EF$  所在直线折叠得到  $\triangle EB'F$ , 连接  $B'D$ , 则  $B'D$  的最小值是\_\_\_\_\_.
3. 在平面直角坐标系中, 点  $A$  的坐标为  $(3,0)$ , 点  $B$  为  $y$  轴正半轴上的一点, 点  $C$  是第一象限内一点, 且  $AC=2$ . 设  $\tan \angle BOC = m$ , 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
4. 如图3, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $AC=6$ ,  $BC=8$ , 点  $F$  在边  $AC$  上, 并且  $CF=2$ , 点  $E$  为边  $BC$  上的动点, 将  $\triangle CEF$  沿直线  $EF$  翻折, 点  $C$  落在点  $P$  处, 则点  $P$  到边  $AB$  距离的最小值是\_\_\_\_\_.

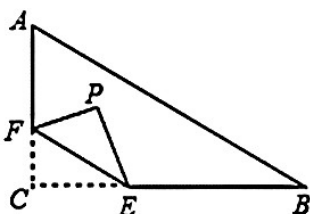


图3

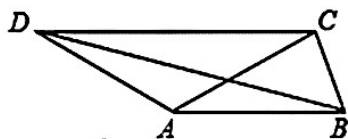


图4

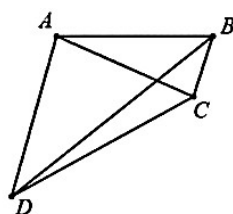


图5

5. 如图4, 四边形  $ABCD$  中,  $DC \parallel AB$ ,  $BC=1$ ,  $AB=AC=AD=2$ . 则  $BD$  的长为\_\_\_\_\_.
6. 如图5, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB=AC=AD$ , 若  $\angle BAC=25^\circ$ ,  $\angle CAD=75^\circ$ , 则  $\angle BDC=$ \_\_\_\_\_,  $\angle DBC=$ \_\_\_\_\_.
7. (2021·嘉兴) 如图6, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC=30^\circ$ ,  $\angle ACB=45^\circ$ ,  $AB=2$ , 点  $P$  从点  $A$  出发沿  $AB$  方向运动, 到达点  $B$  时停止运动, 连结  $CP$ , 点  $A$  关于直线  $CP$  的对称点为  $A'$ , 连结  $A'C$ ,  $A'P$ . 在运动过程中, 点  $A'$  到直线  $AB$  距离的最大值是\_\_\_\_\_; 点  $P$  到达点  $B$  时, 线段  $A'P$  扫过的面积为\_\_\_\_\_.

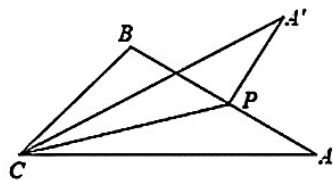


图6

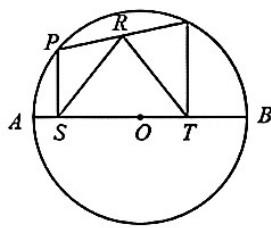


图7

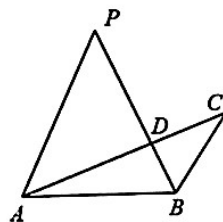


图8

8. 如图7, 已知  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $PQ$  是  $\odot O$  的弦,  $PQ$  与  $AB$  不平行,  $R$  是  $PQ$  的中点, 作  $PS \perp AB$ ,  $QT \perp AB$ , 垂足分别为  $S$ 、 $T$  ( $S \neq T$ ), 并且  $\angle SRT=60^\circ$ , 则  $\frac{PQ}{AB}$  的值等于\_\_\_\_\_.
9. 如图8, 若  $PA=PB$ ,  $\angle APB=2\angle ACB$ ,  $AC$  与  $PB$  交于点  $D$ , 且  $PB=4$ ,  $PD=3$ , 则  $AD \cdot DC=$ \_\_\_\_\_.

10. 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(4, 0)$ 、 $B(-6, 0)$ , 点  $C$  是  $y$  轴上的一个动点, 当  $\angle BCA = 45^\circ$  时, 点  $C$  的坐标为\_\_\_\_\_.

11. 如图 9,  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ , 点  $D$  在  $AB$  边上, 点  $E$  是  $BC$  边上一点 (不与点  $B$ 、 $C$  重合), 且  $DA = DE$ , 则  $AD$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

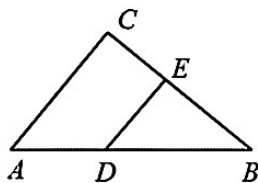


图 9

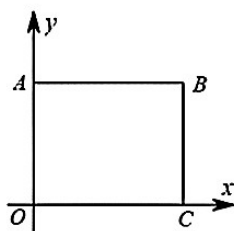


图 10

12. 如图 10, 在平面直角坐标系的第一象限内有一点  $B$ , 坐标为  $(2, m)$ . 过点  $B$  作  $AB \perp y$  轴,  $BC \perp x$  轴, 垂足分别为  $A$ 、 $C$ , 若点  $P$  在线段  $AB$  上滑动 (点  $P$  可以与点  $A$ 、 $B$  重合), 发现使得  $\angle OPC = 45^\circ$  的位置有两个, 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

13. 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $\angle ACB = 45^\circ$ , 将  $\triangle ABC$  绕点  $B$  按逆时针方向旋转得到  $\triangle A'B'C'$ .

(1) 如图 11-1, 当点  $C_1$  在线段  $CA$  的延长线上时, 求  $\angle CC_1A_1$  的度数;

(2) 如图 11-2, 连接  $AA_1$ ,  $CC_1$ . 若  $\triangle ABA_1$  的面积为 4, 求  $\triangle CBC_1$  的面积;

(3) 如图 11-3, 点  $E$  为线段  $AB$  中点, 点  $P$  是线段  $AC$  上的动点, 在  $\triangle ABC$  绕点  $B$  按逆时针方向旋转过程中, 点  $P$  的对应点是点  $P_1$ , 求线段  $EP_1$  长度的最大值与最小值.

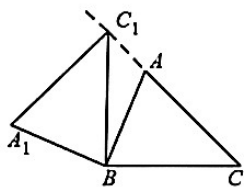


图 11-1

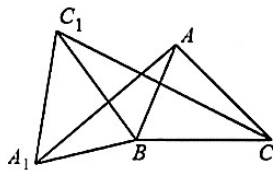


图 11-2

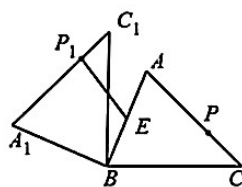
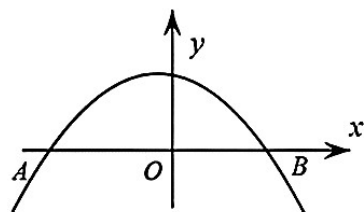


图 11-3

14. 如图，抛物线  $y = -\frac{8}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点（点  $A$  在点  $B$  的左侧），与  $y$  轴交于点

C. （1）求点  $A$ 、 $B$  的坐标；

（2）若直线  $l$  过点  $E(4, 0)$ ， $M$  为直线  $l$  上的动点，当以  $A$ 、 $B$ 、 $M$  为顶点所作的直角三角形有且只有三个时，求直线  $l$  的解析式.



15. 如图，直线  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $B$ 、 $A$  两点，点  $P$  是线段  $OB$  上的一动点，若能

在斜边  $AB$  上找到一点  $C$ ，使  $\angle OCP = 90^\circ$ ，设点  $P$  的坐标为  $(m, 0)$ ，求  $m$  的取值范围.

