

# 手拉手模型典型题

1. (1) 如图 1, 已知 $\triangle CAB$ 和 $\triangle CDE$ 均为等边三角形,  $D$ 在 $AC$ 上,  $E$ 在 $CB$ 上, 易得线段 $AD$ 和 $BE$ 的数量关系是\_\_\_\_\_.

(2) 将图 1 中的 $\triangle CDE$ 绕点 $C$ 旋转到图 2 的位置, 直线 $AD$ 和直线 $BE$ 交于点 $F$ .

①判断线段 $AD$ 和 $BE$ 的数量关系, 并证明你的结论;

②图 2 中 $\angle AFB$ 的度数是\_\_\_\_\_.

(3) 如图 3, 若 $\triangle CAB$ 和 $\triangle CDE$ 均为等腰直角三角形,  $\angle ABC = \angle DEC = 90^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  $DE = EC$ , 直线 $AD$ 和直线 $BE$ 交于点 $F$ , 分别写出 $\angle AFB$ 的度数, 线段 $AD$ 、 $BE$ 间的数量关系.

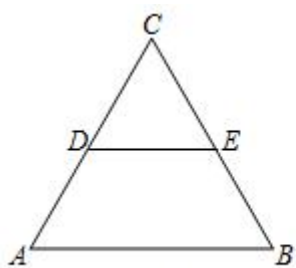


图 1

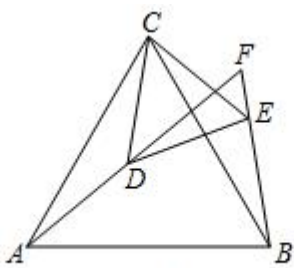


图 2

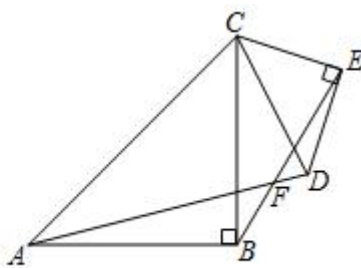


图 3

**【答案】**(1)  $AD=BE$ ; (2) ① $AD=BE$ , 证明见解析; ② $60^\circ$ ; (3)  $\angle AFB=45^\circ$ ;  $AD=\sqrt{2} BE$ .

**【分析】**

(1) 根据等边三角形的性质及线段的和差关系即可得答案;

(2) ①利用角的和差关系可得 $\angle ACD = \angle BCE$ , 利用 SAS 可证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ , 根据全等三角形的性质即可得  $AD=BE$ ;

②设 $AF$ 与 $BC$ 交于点 $O$ , 由 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ 可得 $\angle CAF = \angle CBF$ , 利用三角形内角和定理可得 $\angle AFB = \angle ACB = 60^\circ$ , 可得答案;

(3) 根据角的和差关系可得 $\angle ACD = \angle BCE$ , 根据等腰直角三角形的性质可得

$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE} = \sqrt{2}$ , 即可证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ , 可得 $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$ ,  $\angle CBF = \angle CAF$ ,

可得 $AD$ 与 $BE$ 的数量关系, 利用三角形外角性质可得 $\angle AFB = \angle ACB = 45^\circ$ , 可得答案.

**【详解】**

(1)  $\because \triangle CAB$ 和 $\triangle CDE$ 均为等边三角形,

$\therefore CA=CB$ ,  $CD=CE$ ,

$\therefore CA-CD=CB-CE$ , 即  $AD=BE$ ,

故答案为:  $AD=BE$

(2) ①结论:  $AD=BE$ ,

$\because \triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等边三角形,

$\therefore CA=CB$ ,  $CD=CE$ ,  $\angle ACB=\angle DCE=60^\circ$ ,

$\therefore \angle ACB-\angle DCB=\angle DCE-\angle DCB$ , 即  $\angle ACD=\angle BCE$ ,

在  $\triangle ACD$  和  $\triangle BCE$  中 
$$\begin{cases} CA=CB \\ \angle ACD=\angle BCE, \\ CD=CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$  (SAS),

$\therefore AD=BE$ ;

②结论:  $\angle AFB=60^\circ$ ;

$\because \triangle ACD \cong \triangle BCE$ ,

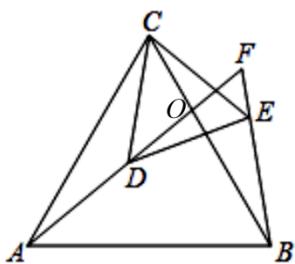
$\therefore \angle CAD=\angle CBF$ ,

设  $BC$  交  $AF$  于点  $O$ .

$\because \angle AOC=\angle BOF$ ,

$\therefore \angle BFO=\angle ACO=60^\circ$ ,

$\therefore \angle AFB=60^\circ$ ,



故答案为  $60^\circ$ ;

(3) 结论:  $\angle AFB=45^\circ$ ,  $AD=\sqrt{2} BE$ ,

$\because \triangle CAB$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ABC=\angle DEC=90^\circ$ ,  $AB=BC$ ,  $DE=EC$ ,

$\therefore \angle ACB=\angle DCE=45^\circ$ ,

$\therefore \angle ACB+\angle BCD=\angle CDE+\angle BCD$ , 即  $\angle ACD=\angle BCE$ ,

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}, \quad \angle CAF = \angle CBF,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2} BE,$$

$$\therefore \angle AFB + \angle CBF = \angle ACB + \angle CAF,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle ACB = 45^\circ.$$

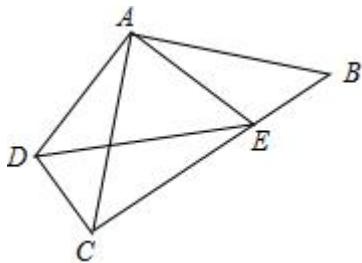
**【点睛】**

此题主要考查等边三角形的性质、等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质以及相似三角形的判定与性质，熟练掌握相关性质及判定定理是解题关键.

2. 已知：如图， $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，点  $E$  在  $BC$  边上.

(1) 求证： $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ ;

(2) 若  $\angle CDE = 60^\circ$ ，求  $\angle AEB$  的度数.



**【答案】**(1) 证明见详解；(2)  $105^\circ$  .

**【分析】**

(1) 由题意根据等腰直角三角形的性质和全等三角形的判定进行分析证明即可；

(2) 根据题意直接利用全等三角形的性质进行分析解答即可.

**【详解】**

解：(1) 证明： $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$  ,

$$\therefore \angle BAC - \angle CAE = \angle DAE - \angle CAE,$$

即  $\angle DAC = \angle EAB$ ,

在  $\triangle ACD$  与  $\triangle ABE$  中

$$\begin{cases} AD=AE \\ \angle DAC=\angle EAB, \\ AC=AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE$  (SAS);

(2)  $\because \triangle ACD \cong \triangle ABE$ ,

$\therefore \angle ADC = \angle AEB$ ,

$\because \triangle ADE$  是等腰直角三角形,

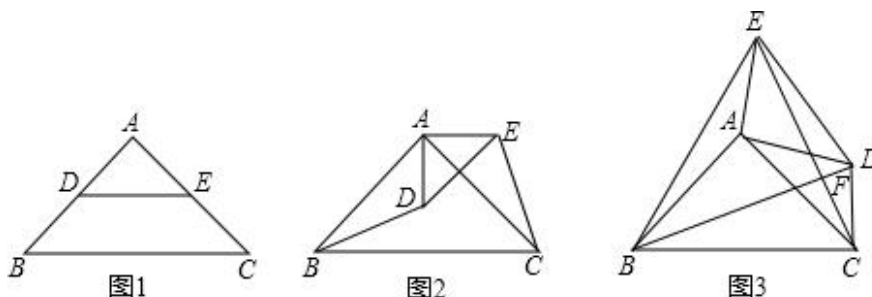
$\therefore \angle ADE = \angle AED = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle AEB = \angle ADE + \angle CDE = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ .

**【点睛】**

本题考查全等三角形的判定和性质, 解题的关键是根据等腰直角三角形的性质和全等三角形的判定进行解答.

3.  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰直角三角形,  $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$



(1) 如图 1, 点 D, E 在 AB, AC 上, 则 BD, CE 满足怎样的数量关系和位置关系?

(2) 如图 2, 点 D 在  $\triangle ABC$  内部, 点 E 在  $\triangle ABC$  外部, 连结 BD, CE, 则 BD, CE 满足怎样的数量关系和位置关系? 请说明理由.

(3) 如图 3, 点 D, E 都在  $\triangle ABC$  外部, 连结 BD, CE, CD, EB, BD 与 CE 相交于 F 点.

①若  $BD=4$ , 求四边形 BCDE 的面积.

②若  $AB=2$ ,  $AD=1$ , 设  $CD^2=x$ ,  $EB^2=y$ , 求 y 与 x 之间的函数关系式.

**【答案】**(1)  $BD=CE$ ,  $BD \perp CE$ ; (2)  $BD=CE$ ,  $BD \perp CE$ , 理由见详解; (3) ①8; ② $y=10-x$ .

**【分析】**

(1) 由题意直接根据等腰直角三角形的性质进行分析即可解答;

(2) 根据题意延长 BD, 分别交 AC、CE 于 F、G, 证明  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ , 根据全等三角形的性质、垂直的定义进行解答即可;

(3) ①根据  $S_{\text{四边形 BCDE}} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle DCE}$  计算, 即可求出四边形 BCDE 的面积;

②由题意直接根据勾股定理计算即可得出答案.

【详解】

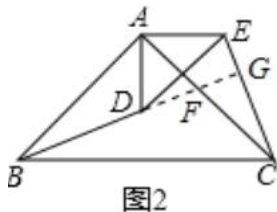
解：（1） $\because \triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰直角三角形，

$$\therefore AB=AC, AD=AE, \angle BAC=90^\circ,$$

$$\therefore BD=CE, BD \perp CE;$$

$$(2) BD=CE, BD \perp CE,$$

理由如下：延长  $BD$ ，分别交  $AC$ 、 $CE$  于  $F$ 、 $G$ ，



$\because \triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰直角三角形，

$$\therefore AB=AC, AD=AE, \angle BAC=\angle DAE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD=\angle BAC-\angle DAC, \angle CAE=\angle DAE-\angle DAC$$

$$\therefore \angle BAD=\angle CAE,$$

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACE$  中，

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE \end{cases}$$

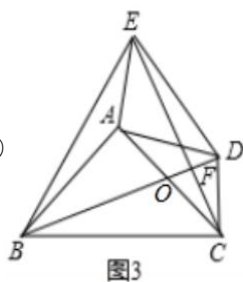
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore BD=CE, \angle ABD=\angle ACE,$$

$$\therefore \angle AFB=\angle GFC,$$

$$\therefore \angle CGF=\angle BAF=90^\circ, \text{ 即 } BD \perp CE;$$

(3) ①



$\because \triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰直角三角形，

$$\therefore AB=AC, AD=AE, \angle BAC=\angle DAE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle DAC, \angle CAE=\angle DAE+\angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAD=\angle CAE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore BD=CE, \angle ABD=\angle ACE,$$

$$\because \angle AOB = \angle FOC,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 BCDE}} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \times CE \times BF + \frac{1}{2} \times CE \times DF = \frac{1}{2} \times CE \times BD = 8;$$

②在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $AB=2$ ,  $AD=1$ ,

则有  $AB=AC=2$ ,

$$\therefore BC = 2\sqrt{2}$$

同理:  $DE = \sqrt{2}$

$$\because \angle BHC = 90^\circ$$

$$\therefore CD^2 + EB^2 = CF^2 + FD^2 + EF^2 + FB^2$$

$$= CF^2 + FB^2 + EF^2 + FD^2 = BC^2 + DE^2$$

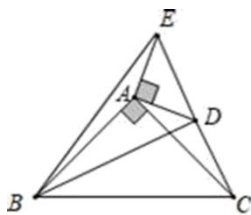
$$= (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 10, \text{ 即 } x+y=10,$$

$$\therefore y=10-x.$$

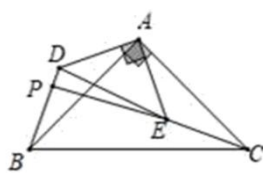
【点睛】

本题是四边形综合题, 主要考查的是等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定和性质以及函数解析式的确定, 熟练掌握相关的判定定理和性质定理是解题的关键.

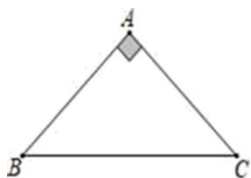
4. 如图乙,  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  是有公共顶点的等腰直角三角形,  $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ , 点  $P$  为射线  $BD$ ,  $CE$  的交点.



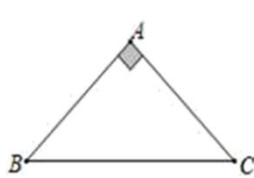
图甲



图乙



备用图



备用图

(1) 如图甲, 将  $\triangle ADE$  绕点  $A$  旋转, 当  $C$ 、 $D$ 、 $E$  在同一条直线上时, 连接  $BD$ 、 $BE$ , 则下列给出的四个结论中, 其中正确的是哪几个\_\_\_\_\_. (回答直接写序号)

①  $BD=CE$ ; ②  $BD \perp CE$ ; ③  $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ; ④  $BE^2 = 2(AD^2 + AB^2)$

(2) 若  $AB=6$ ,  $AD=3$ , 把  $\triangle ADE$  绕点  $A$  旋转:

①当 $\angle CAE=90^\circ$ 时，求  $PB$  的长；

②直接写出旋转过程中线段  $PB$  长的最大值和最小值.

**【答案】** (1) ①②③; (2) ① $PB=\frac{6\sqrt{5}}{5}$  或  $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ ; ② $PB$  长的最大值是  $3\sqrt{3}+3$ ,  $PB$

长的最小值是  $3\sqrt{3}-3$ .

**【分析】**

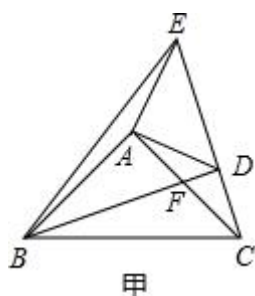
(1) ①由条件证明 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ ，就可以得到结论②由 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ 就可以得出 $\angle ABD=\angle ACE$ ，就可以得出 $\angle BDC=90^\circ$ ，进而得出结论；③由条件知 $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=45^\circ$ ，由 $\angle ABD=\angle ACE$ 就可以得出结论；④ $\triangle BDE$ 为直角三角形就可以得出 $BE^2=BD^2+DE^2$ ，由 $\triangle DAE$ 和 $\triangle BAC$ 是等腰直角三角形就有 $DE^2=2AD^2$ ， $BC^2=2AB^2$ ，就有 $BC^2=BD^2+CD^2\neq BD^2$ 就可以得出结论.

(2) ①分两种情形  $a$ 、如图乙 - 1 中，当点  $E$  在  $AB$  上时， $BE=AB-AE=3$ . 由 $\triangle PEB\sim\triangle AEC$ ，得 $\frac{PB}{AC}=\frac{BE}{CE}$ ，由此即可解决问题.  $b$ 、如图乙 - 2 中，当点  $E$  在  $BA$  延长线上时， $BE=9$ . 解法类似.

② $a$ 、如图乙 - 3 中，以  $A$  为圆心  $AD$  为半径画圆，当  $CE$  在 $\odot A$  上方与 $\odot A$  相切时， $PB$  的值最大.  $b$ 、如图乙 - 4 中，以  $A$  为圆心  $AD$  为半径画圆，当  $CE$  在 $\odot A$  下方与 $\odot A$  相切时， $PB$  的值最小，分别求出  $PB$  即可.

**【详解】**

(1) 解：如图甲：



① $\because \angle BAC=\angle DAE=90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC+\angle DAC=\angle DAE+\angle DAC$ ,

即 $\angle BAD=\angle CAE$ .

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AD=AE \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AB=AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = CE, \therefore \text{①正确.}$$

$$\text{②} \because \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE.$$

$$\because \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle AFB = 90^\circ.$$

$$\because \angle DFC = \angle AFB,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FDC = 90^\circ.$$

$$\therefore BD \perp CE, \therefore \text{②正确.}$$

$$\text{③} \because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ, \therefore \text{③正确.}$$

$$\text{④} \because BD \perp CE,$$

$$\therefore BE^2 = BD^2 + DE^2,$$

$$\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore DE^2 = 2AD^2, BC^2 = 2AB^2,$$

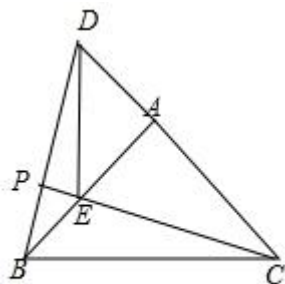
$$\because BC^2 = BD^2 + CD^2 \neq BD^2,$$

$$\therefore 2AB^2 = BD^2 + CD^2 \neq BD^2,$$

$$\therefore BE^2 \neq 2(AD^2 + AB^2), \therefore \text{④错误.}$$

故答案为①②③.

(2) ①解:  $a$ 、如图乙-1中, 当点  $E$  在  $AB$  上时,  $BE = AB - AE = 3$ .



图乙-1

$$\because \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore CE = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$



同 (1) 可证  $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ .

$$\therefore \angle DBA = \angle ECA.$$

$$\therefore \angle PEB = \angle AEC,$$

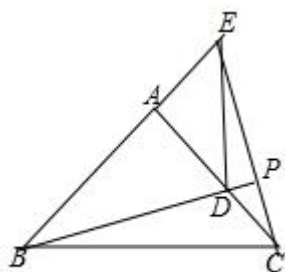
$$\therefore \triangle PEB \sim \triangle AEC.$$

$$\therefore \frac{PB}{AC} = \frac{BE}{CE},$$

$$\therefore \frac{PB}{6} = \frac{3}{3\sqrt{5}},$$

$$\therefore PB = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

b、如图乙 - 2 中，当点  $E$  在  $BA$  延长线上时， $BE=9$ 。



图乙-2

$$\therefore \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore CE = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

同 (1) 可证  $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ .

$$\therefore \angle DBA = \angle ECA.$$

$$\therefore \angle BEP = \angle CEA,$$

$$\therefore \triangle PEB \sim \triangle AEC,$$

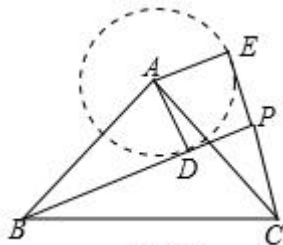
$$\therefore \frac{PB}{AC} = \frac{BE}{CE},$$

$$\therefore \frac{PB}{6} = \frac{9}{3\sqrt{5}},$$

$$\therefore PB = \frac{18\sqrt{5}}{5}.$$

综上， $PB = \frac{6\sqrt{5}}{5}$  或  $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ 。

②解：a、如图乙 - 3 中，以  $A$  为圆心  $AD$  为半径画圆，当  $CE$  在  $\odot A$  上方与  $\odot A$  相切时， $PB$  的值最大。



图乙-3

理由：此时  $\angle BCE$  最大，因此  $PB$  最大，（ $\triangle PBC$  是直角三角形，斜边  $BC$  为定值， $\angle BCE$  最大，因此  $PB$  最大）

$$\because AE \perp EC,$$

$$\therefore EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

由（1）可知， $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，

$$\therefore \angle ADB = \angle AEC = 90^\circ, \quad BD = CE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ADP = \angle DAE = \angle AEP = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $AEPD$  是矩形，

$$\therefore PD = AE = 2,$$

$$\therefore PB = BD + PD = 3\sqrt{3} + 3.$$

综上所述， $PB$  长的最大值是  $3\sqrt{3} + 3$ 。

b、如图乙 - 4 中，以  $A$  为圆心  $AD$  为半径画圆，当  $CE$  在  $\odot A$  下方与  $\odot A$  相切时， $PB$  的值最小。

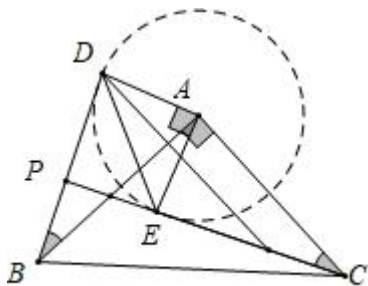


图 乙-4

理由：此时  $\angle BCE$  最小，因此  $PB$  最小，（ $\triangle PBC$  是直角三角形，斜边  $BC$  为定值， $\angle BCE$  最小，因此  $PB$  最小）

$$\because AE \perp EC,$$

$$\therefore EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

由（1）可知， $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，

$$\therefore \angle ADB = \angle AEC = 90^\circ, \quad BD = CE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ADP = \angle DAE = \angle AEP = 90^\circ,$$

∴ 四边形  $AE PD$  是矩形,

∴  $PD = AE = 4$ ,

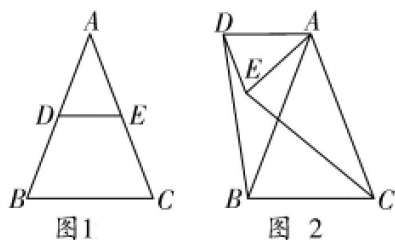
∴  $PB = BD - PD = 3\sqrt{3} - 3$ .

综上所述,  $PB$  长的最小值是  $3\sqrt{3} - 3$ .

**【点睛】**

本题属于几何变换综合题, 考查等腰直角三角形的性质、旋转变换、全等三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质、圆的有关知识, 解题的关键是灵活运用这些知识解决问题, 学会分类讨论的思想思考问题, 学会利用图形的特殊位置解决最值问题, 属于中考压轴题.

5. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 4$ ,  $D$ 、 $E$  分别是  $AB$ 、 $AC$  的中点,  $\angle BAC = 40^\circ$ .



(1) 如图 1, 若  $DE = a$ , 求  $BC$  的长度 (用含  $a$  的代数式表示);

(2) 如图 2, 将  $\triangle ADE$  绕点  $A$  顺时针旋转, 旋转角为  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ), 连接  $BD$ 、 $CE$ , 判断  $BD$  与  $CE$  的数量关系, 并说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 当  $\triangle ACE$  的外心在三角形的外部时, 请直接写出  $\alpha$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $2a$ ; (2)  $BD = CE$ , 理由见详解; (3)  $0^\circ < \alpha < 60^\circ$  或  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

**【分析】**

(1) 由题意直接根据三角形中位线定理进行分析即可解答;

(2) 根据题意先证明  $\triangle DAB \cong \triangle EAC$ , 进而根据全等三角形的性质分析即可得到答案;

(3) 根据题意分  $\angle AEC = 90^\circ$ 、 $\angle EAC = 90^\circ$  两种情况求出  $\alpha$ , 根据三角形的外心的概念进行解答.

**【详解】**

解: (1) ∵  $D$ 、 $E$  分别是  $AB$ 、 $AC$  的中点,  $DE = a$ ,

∴  $BC = 2DE = 2a$ ;

(2)  $BD = CE$ ,

理由如下: ∵  $D$ 、 $E$  分别是  $AB$ 、 $AC$  的中点,  $AB = AC$ ,

$\therefore AD=AE$ ,

由旋转变换的性质可知,  $\angle DAB=\angle EAC$ ,

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle EAC$ 中,

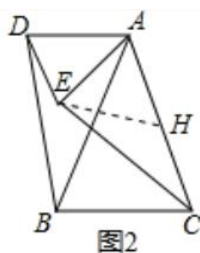
$$\begin{cases} AD=AE \\ \angle DAB=\angle EAC, \\ AB=AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle EAC$  (SAS),

$\therefore BD=CE$ ;

(3) 当 $\triangle ACE$ 的外心在三角形的外部时,  $\triangle ACE$ 为钝角三角形,

当 $\angle AEC=90^\circ$ 时, 取 $AC$ 的中点 $H$ , 连接 $EH$ ,



则  $EH=\frac{1}{2}AC=AH$ ,

由题意得,  $AE=AH$ ,

$\therefore AE=AH=EH$ ,

$\therefore \triangle AEH$ 为等边三角形,

$\therefore \angle EAH=60^\circ$ ,

$\therefore$ 当 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时,  $\triangle ACE$ 为钝角三角形,

当 $\angle EAC=90^\circ$ 时,  $\alpha=90^\circ$ ,

$\therefore 90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时,  $\triangle ACE$ 为钝角三角形,

综上所述: 当 $\triangle ACE$ 的外心在三角形的外部时,  $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 或 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

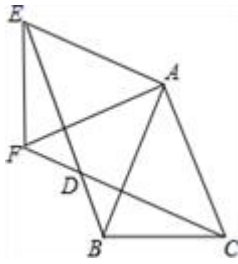
#### 【点睛】

本题考查的是旋转变换的性质和三角形的外心的概念以及全等三角形的判定和性质, 熟练掌握三角形的外接圆圆心的概念、全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

6. 如图,  $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC=1$ ,  $\angle BAC=45^\circ$ ,  $\triangle AEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 $A$ 按顺时针方向旋转得到的, 连接 $BE$ ,  $CF$ 相交于点 $D$ ,

(1) 求证:  $BE=CF$ ;

(2) 当四边形 $ACDE$ 为菱形时, 求 $BD$ 的长.



**【答案】**(1) 证明见解析 (2)  $\sqrt{2}-1$

**【分析】**

(1) 先由旋转的性质得  $AE=AB$ ,  $AF=AC$ ,  $\angle EAF=\angle BAC$ , 则

$\angle EAF+\angle BAF=\angle BAC+\angle BAF$ , 即  $\angle EAB=\angle FAC$ , 利用  $AB=AC$  可得  $AE=AF$ , 得出  $\triangle ACF \cong \triangle ABE$ , 从而得出  $BE=CF$ ;

(2) 由菱形的性质得到  $DE=AE=AC=AB=1$ ,  $AC \parallel DE$ , 根据等腰三角形的性质得  $\angle AEB=\angle ABE$ , 根据平行线得性质得  $\angle ABE=\angle BAC=45^\circ$ , 所以  $\angle AEB=\angle ABE=45^\circ$ , 于是可判断  $\triangle ABE$  为等腰直角三角形, 所以  $BE=\sqrt{2} AC=\sqrt{2}$ , 于是利用  $BD=BE-DE$  求解.

**【详解】**

(1)  $\because \triangle AEF$  是由  $\triangle ABC$  绕点  $A$  按顺时针方向旋转得到的,

$\therefore AE=AB$ ,  $AF=AC$ ,  $\angle EAF=\angle BAC$ ,

$\therefore \angle EAF+\angle BAF=\angle BAC+\angle BAF$ ,

即  $\angle EAB=\angle FAC$ ,

在  $\triangle ACF$  和  $\triangle ABE$  中, 
$$\begin{cases} AC=AB \\ \angle CAF=\angle BAE \\ AF=AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle ABE$

$\therefore BE=CF$ .

(2)  $\because$  四边形  $ACDE$  为菱形,  $AB=AC=1$ ,

$\therefore DE=AE=AC=AB=1$ ,  $AC \parallel DE$ ,

$\therefore \angle AEB=\angle ABE$ ,  $\angle ABE=\angle BAC=45^\circ$ ,

$\therefore \angle AEB=\angle ABE=45^\circ$ ,

$\therefore \triangle ABE$  为等腰直角三角形,

$\therefore BE=\sqrt{2} AC=\sqrt{2}$ ,

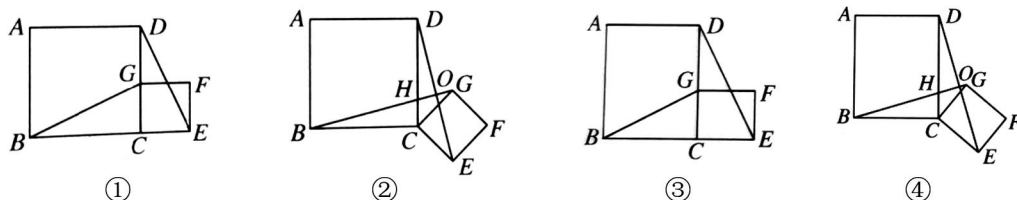
$\therefore BD=BE-DE=\sqrt{2}-1$ .

考点：1. 旋转的性质；2. 勾股定理；3. 菱形的性质.

7. (1) 在正方形  $ABCD$  中,  $G$  是  $CD$  边上的一个动点 (不与  $C$ 、 $D$  重合), 以  $CG$  为边在正方形  $ABCD$  外作一个正方形  $CEFG$ , 连结  $BG$ 、 $DE$ , 如图①. 直接写出线段  $BG$ 、 $DE$  的关系\_\_\_\_\_;

(2) 将图①中的正方形  $CEFG$  绕点  $C$  按顺时针方向旋转任意角度  $\alpha$ , 如图②, 试判断 (1) 中的结论是否成立? 若成立, 直接写出结论, 若不成立, 说明理由;

(3) 将 (1) 中的正方形都改为矩形, 如图③, 再将矩形  $CEFG$  绕点  $C$  按顺时针方向旋转任意角度  $\alpha$ , 如图④, 若  $AB=a$ ,  $BC=b$ ;  $CE=ka$ ,  $CG=kb$ , ( $a \neq b$ ) 试判断 (1) 中的结论是否仍然成立? 并说明理由.



**【答案】** (1)  $BG=DE$ ,  $BG \perp DE$ ; (2)  $BG=DE$ ,  $BG \perp DE$ ; (3)  $BG \perp DE$  成立,  $BG=DE$  不成立, 理由见解析.

**【分析】**

(1) 由正方形的性质得出  $BC=CD$ ,  $CE=CG$ ,  $\angle BCD=\angle ECG=90^\circ$ , 由 SAS 证明  $\triangle BCG \cong \triangle DCE$ , 得出  $BG=DE$ ,  $\angle CBG=\angle CDE$ , 延长  $BG$  交  $DE$  于  $H$ , 由角的互余关系和对顶角相等证出  $\angle CDE+\angle DGH=90^\circ$ , 由三角形内角和定理得出  $\angle DHG=90^\circ$  即可;

(2) 由正方形的性质可得  $BC=CD$ ,  $CE=CG$ ,  $\angle BCD=\angle ECG=90^\circ$ , 然后求出  $\angle BCG=\angle DCE$ , 由 SAS 证明  $\triangle BCG$  和  $\triangle DCE$  全等, 由全等三角形对应边相等可得  $BG=DE$ , 全等三角形对应角相等可得  $\angle CBG=\angle CDE$ , 然后求出  $\angle DOH=90^\circ$ , 再根据垂直的定义证明即可;

(3) 根据矩形的性质证明  $\triangle BCG \sim \triangle DCE$ , 得到  $\frac{BG}{DE} = \frac{b}{a}$ , 根据相似三角形对应角相等可得  $\angle CBG=\angle CDE$ , 然后求出  $\angle DOH=90^\circ$ , 再根据垂直的定义证明即可.

**【详解】**

(1) 解:  $BG=DE$ ,  $BG \perp DE$ ; 理由如下:

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形, 四边形  $CEFG$  是正方形,

$\therefore BC=CD$ ,  $CE=CG$ ,  $\angle BCD=\angle ECG=90^\circ$ ,

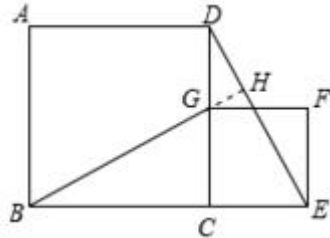
在  $\triangle BCG$  和  $\triangle DCE$  中,

$$\begin{cases} BC = DC \\ \angle BCG = \angle ECG, \\ CG = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCG \cong \triangle DCE$  (SAS),

$\therefore BG = DE, \angle CBG = \angle CDE,$

延长 BG 交 DE 于 H, 如图所示:



$\because \angle CBG + \angle BGC = 90^\circ, \angle DGH = \angle BGC,$

$\therefore \angle CDE + \angle DGH = 90^\circ,$

$\therefore \angle DHG = 90^\circ,$

$\therefore BG \perp DE;$

(2) 解: 成立; 理由如下:

$\because$  四边形 ABCD 是正方形, 四边形 CEFG 是正方形,

$\therefore BC = CD, CE = CG, \angle BCD = \angle ECG = 90^\circ,$

$\therefore \angle BCD + \angle DCG = \angle ECG + \angle DCG,$

即  $\angle BCG = \angle DCE,$

在  $\triangle BCG$  和  $\triangle DCE$  中,

$$\begin{cases} BC = CD \\ \angle BCG = \angle DCE, \\ CG = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCG \cong \triangle DCE$  (SAS),

$\therefore BG = DE, \angle CBG = \angle CDE,$

$\because \angle CBG + \angle BHC = 90^\circ, \angle BHC = \angle DHO,$

$\therefore \angle CDE + \angle DHO = 90^\circ,$

在  $\triangle DHO$  中,  $\angle DOH = 180^\circ - (\angle CDE + \angle DHO) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$

$\therefore BG \perp DE.$

(3)  $BG \perp DE$  成立,  $BG = DE$  不成立.

结合图④说明如下:

$\because$  四边形 ABCD 和四边形 CEFG 都是矩形, 且  $AB = a, BC = b, CG = kb, CE = ka (a \neq b, k$

$$\angle BCD = \angle ECG = 90^\circ.$$

$$\therefore \triangle BCG \simeq \triangle DCE.$$

又 $\because \angle BHC = \angle DHO$ ,  $\angle CBG + \angle BHC = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle \text{DOH} = 90^\circ.$$

### 【点睛】

试卷第 16 页，总 16 页