

2026 春季初一数学每日一题打卡 008

观察下列各式：

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1;$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1;$$

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1;$$

...

(1) 猜想： $(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^3+x^2+x+1)=$ _____ ；

(2) 利用 (1) 中的猜想计算： $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1=$ _____ ；

(3) 计算： $2^{20}-2^{19}+2^{18}-2^{17}+\cdots-2^3+2^2-2+1$ ；

(4) 计算 $3^{100}+3^{99}+3^{98}+\cdots+3^{52}+3^{51}+3^{50}$ ；

(5) 若 $x^3+x^2+x+1=0$ ，求 x^{2025} 的值．

试题解析

观察下列各式：

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1;$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1;$$

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1;$$

...

(1) 猜想: $(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^3+x^2+x+1)=\underline{x^{n+1}-1}$;

(2) 利用 (1) 中的猜想计算: $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1=\underline{63}$;

(3) 计算: $2^{20}-2^{19}+2^{18}-2^{17}+\cdots-2^3+2^2-2+1$;

(4) 计算 $3^{100}+3^{99}+3^{98}+\cdots+3^{52}+3^{51}+3^{50}$;

(5) 若 $x^3+x^2+x+1=0$, 求 x^{2025} 的值.

解: (1) 根据题干规律可得: $(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^3+x^2+x+1)=x^{n+1}-1$;

故答案为: $x^{n+1}-1$;

(2) $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1=(2-1)\times(2^5+2^4+2^3+2^2+2+1)=2^6-1=63$;

故答案为: 63;

(3) 令 $x=-2$, $n=20$, 由 $(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1)=x^{n+1}-1$ 得,

$$(-2-1)[(-2)^{20}+(-2)^{19}+\cdots+(-2)^3+(-2)^2+(-2)+1]=(-2)^{21}-1,$$

$$\therefore -3(2^{20}-2^{19}+2^{18}-2^{17}\cdots-2^3+2^2-2+1)=-2^{21}-1,$$

$$\therefore 2^{20}-2^{19}+2^{18}-2^{17}\cdots-2^3+2^2-2+1=\frac{2^{21}+1}{3}.$$

(4) $3^{100}+3^{99}+3^{98}+\cdots+3^{52}+3^{51}+3^{50}$

$$=(3^{100}+3^{99}+3^{98}+\cdots+3^3+3^2+3+1)-(3^{49}+3^{48}+3^{47}+\cdots+3^3+3^2+3+1)$$

$$=\frac{1}{2}\times(3-1)\times(3^{100}+3^{99}+3^{98}+\cdots+3^3+3^2+3+1)-\frac{1}{2}\times(3-1)\times(3^{49}+3^{48}+3^{47}+\cdots+3^3+3^2+3+1)$$

$$=\frac{1}{2}\times(3^{101}-1)-\frac{1}{2}\times(3^{50}-1)$$

$$=\frac{3^{101}-3^{50}}{2};$$

(5) $\because x^3+x^2+x+1=0$,

$$\therefore (x-1)(x^3+x^2+x+1)=0,$$

$$\therefore x^4-1=0,$$

$$\therefore x^4=1,$$

$$\therefore x=\pm 1,$$

当 $x=1$ 时, $x^3+x^2+x+1=4$ 与题意不符,

$$\therefore x=-1,$$

$$\therefore x^{2025}=-1.$$