

2025 春季初二数学每日一题打卡 004

004 试题来源：2024 春扬州邗江区校级期中第 28 题

在矩形  $ABCD$  中， $AB=3$ ， $BC=4$ ， $E$ 、 $F$  是直线  $AC$  上的两个动点，分别从  $A$ ， $C$  同时出发相向而行，速度均为每秒 1 个单位长度，运动时间为  $t$  秒 ( $0 \leq t \leq 7$ )。

- (1) 如图 1， $M$ 、 $N$  分别是  $AB$ ， $DC$  中点，当  $t = \underline{\hspace{2cm}}$  s 时，四边形  $EMFN$  是矩形。
- (2) 若在点  $E$ 、 $F$  运动的同时，点  $G$  以每秒 1 个单位长度的速度从  $A$  出发，沿折线  $A-B-C$  运动，点  $H$  以每秒 1 个单位长度的速度从  $C$  出发，沿折线  $C-D-A$  运动。
- ①如图 2，作  $AC$  的垂直平分线交  $AD$ 、 $BC$  于点  $P$ 、 $Q$ ，当四边形  $PGQH$  的面积是矩形  $ABCD$  面积的一半时，求  $t$  值；
- ②如图 3，在异于  $G$ 、 $H$  所在矩形边上取  $P$ 、 $Q$ ，使得  $PD=BQ$ ，顺次连接  $P$ 、 $G$ 、 $Q$ 、 $H$ ，则四边形  $PGQH$  周长的最小值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

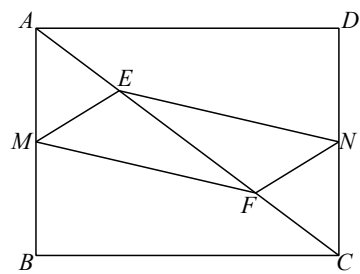


图1

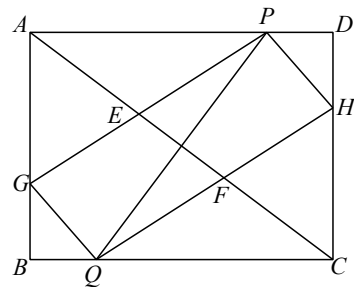


图2

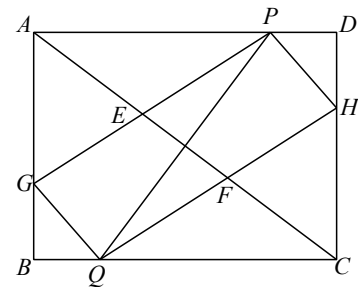


图3

试题解析:

(1) 如图1,  $M$ 、 $N$ 分别是  $AB$ ,  $DC$  中点, 当  $t = \underline{\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{9}{2}}$  s 时, 四边形  $EMFN$  是矩形.

解: (1) 如图, 连接  $MN$ ,  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,  $\therefore AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ ,  $\therefore \angle MAE = \angle NCF$ ,  
 $\because M$ 、 $N$  分别是  $AB$ ,  $DC$  中点,  $\therefore AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD = CN$ ,  $AM \parallel CN$ ,  
 $\because E$ 、 $F$  是直线  $AC$  上的两个动点, 分别从  $A$ ,  $C$  同时出发相向而行, 速度均为每秒 1 个单位长度,  
 $\therefore AE = CF = t$ ,  $\therefore \triangle AEM \cong \triangle CFN (SAS)$ ,  
 $\therefore ME = FN$ ,  $\angle AEM = \angle CFN$ ,  $\therefore \angle FEM = \angle EFN$ ,  $\therefore ME \parallel FN$ ,  
 $\therefore$  四边形  $EMFN$  为平行四边形,  
 $\therefore$  当  $EF = MN$  时, 四边形  $EMFN$  为矩形,  
 $\because AM = CN$ ,  $AM \parallel CN$ ,  $\therefore$  四边形  $BCNM$  是平行四边形,  
 $\because \angle B = 90^\circ$ ,  $\therefore$  四边形  $BCNM$  是矩形,  $\therefore MN = BC = 4$ ,  
在  $Rt\triangle ABC$  中,  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ ,  
 $\therefore AE = CF = \frac{1}{2} (AC - EF) = \frac{1}{2} \times (5 - 4) = \frac{1}{2}$  或  
 $AE = CF = \frac{1}{2} (AC + EF) = \frac{1}{2} \times (5 + 4) = \frac{9}{2}$ , 解得:  $t = \frac{1}{2}$  或  $\frac{9}{2}$ ;

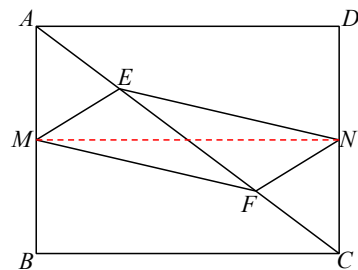


图1

(2) ①如图2, 作  $AC$  的垂直平分线交  $AD$ 、 $BC$  于点  $P$ 、 $Q$ , 当四边形  $PGQH$  的面积是矩形  $ABCD$  面积的一半时, 求  $t$  值;

(2) ①如图2, 连接  $AQ$ ,  $\because PQ$  垂直平分  $AC$ ,  $\therefore AQ = CQ$ ,  
在  $Rt\triangle ABQ$  中,  $AB^2 + BQ^2 = AQ^2$ , 则  $3^2 + BQ^2 = (4 - BQ)^2$ ,  
解得:  $BQ = \frac{7}{8}$ ,  $\therefore CQ = 4 - \frac{7}{8} = \frac{25}{8}$ ,  
根据题意得:  $AG = CH = t$ ,  $AE = CF$ ,  
 $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,  $\therefore AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ ,  $\therefore \angle GAE = \angle HCF$ ,  
 $\therefore \triangle AEG \cong \triangle CFH (SAS)$ ,  $\therefore \angle AEG = \angle CFH$ ,  
 $\therefore \angle FEG = \angle EFH$ ,  $\angle EGA = \angle FHC$ ,  $\therefore PG \parallel QH$ ,  
 $\because \angle EGA = \angle FHC$ ,  $AG = CH$ ,  $\angle PAG = \angle QCH = 90^\circ$ ,  $\therefore \triangle APG \cong \triangle CQH (ASA)$ ,  
 $\therefore PG = QH$ ,  $AP = CQ = \frac{25}{8}$ ,  $\therefore$  四边形  $PGQH$  是平行四边形,  $\therefore S_{\square PGQH} = 2S_{\triangle PGQ}$ ,  
 $\because$  四边形  $PGQH$  的面积是矩形  $ABCD$  面积的一半,  
 $\therefore S_{\triangle PGQ} = \frac{1}{2} S_{\square PGQH} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形} ABCD} = \frac{1}{4} \times 3 \times 4 = 3$ ,  $S_{\triangle PGQ} = S_{\text{梯形} ABQP} - S_{\triangle PGA} - S_{\triangle BQG}$ ,  
 $\therefore \frac{1}{2} (BQ + AP) \times AB - \frac{1}{2} BG \times BQ - \frac{1}{2} AG \times AP = 3$ ,  
 $\therefore \frac{1}{2} \left( \frac{7}{8} + \frac{25}{8} \right) \times 3 - \frac{1}{2} (3 - t) \times \frac{7}{8} - \frac{1}{2} t \times \frac{25}{8} = 3$ , 解得:  $t = \frac{3}{2}$ ;

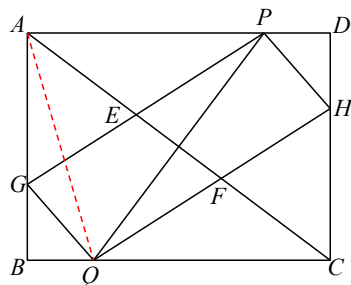


图2

②如图3, 在异于  $G$ 、 $H$  所在矩形边上取  $P$ 、 $Q$ , 使得  $PD = BQ$ , 顺次连接  $P$ 、 $G$ 、 $Q$ 、 $H$ , 则四边形  $PGQH$  周长的最小值是 10.

②如图3, 作点  $G$  关于  $BC$  的对称点  $G'$ , 过点  $G'$  作  $GK \perp DC$  于  $K$ ,  
连接  $GH$ ,  $QG$ , 则  $BG = BG' = CK$ ,  $QG = G'Q$ ,  $GK = BC = 4$ ,  
 $\because AG = CH$ ,  $\therefore HK = CH + CK = AG + BG = 3$ ,  
 $\therefore GH = \sqrt{GK^2 + HK^2} = 5$ ,  
由①得: 四边形  $PGQH$  是平行四边形,  
 $\therefore$  四边形  $PGQH$  的周长为  $= 2QH + 2GQ = 2QH + 2QG' \geq 2G'H$ ,  
即当点  $G'$ ,  $Q$ ,  $H$  三点共线时, 四边形  $PGQH$  的周长最小,  
最小值为  $2 \times 5 = 10$ .

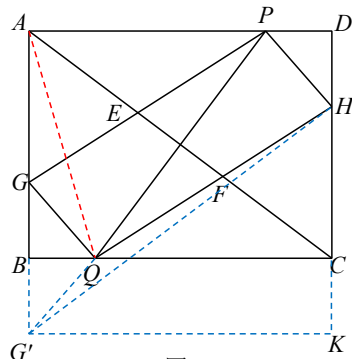


图3