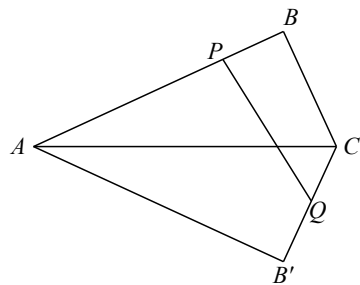
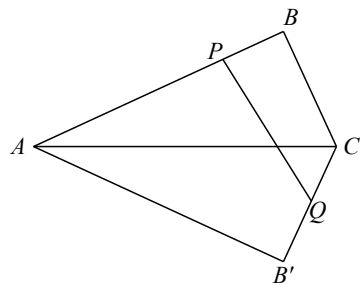


2025 春季初三数学每日一题打卡 004

004 试题来源:2024 春季无锡新吴区模拟

如图,将直角  $\triangle ABC$  沿斜边  $AC$  翻折后  $B$  点的对应点  $B'$ ,点  $P$ 、 $Q$  是线段  $AB$ 、 $B'C$  上的动点,且  $BP = B'Q$ ,已知  $AB = 12$ ,  $BC = 5$ ,则线段  $PQ$  的最小值为\_\_\_\_\_.



试题解析:

如图,将直角 $\triangle ABC$ 沿斜边 $AC$ 翻折后 $B$ 点的对应点 $B'$ ,点 $P$ 、 $Q$ 是线段 $AB$ 、 $B'C$ 上的动点,且 $BP = B'Q$ ,已知 $AB = 12$ ,  $BC = 5$ ,则线段 $PQ$ 的最小值为  $\frac{60\sqrt{2}}{13}$ 。

解法一:代数解法:如图,在 $AB'$ 上截取 $B'D = PB$ ,

连接 $PD$ ,作 $QF \perp AC$ 于 $F$ ,作 $QE \perp PD$ 于 $E$ ,

设 $PB = B'Q = B'D = 13a$ ,

$\therefore AP = AD = 12 - 13a$ ,  $\therefore \angle BAC = \angle B'AC$ ,  $\therefore AG \perp PD$ ,

$\therefore AG = AP \cdot \cos \angle BAC = AP \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}(12 - 13a) = \frac{144}{13} - 12a$ ,

$PG = \frac{5}{13}(12 - 13a) = \frac{60}{13} - 5a$ ,

在 $Rt\triangle CQF$ 中,  $CQ = 5 - 13a$ ,  $\cos \angle ACB' = \frac{CB'}{AC} = \frac{5}{13}$ ,

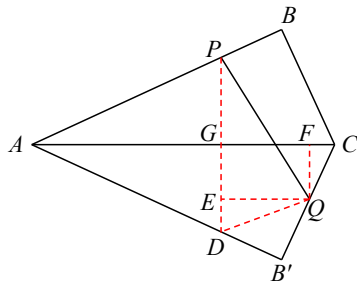
$\therefore CF = \frac{5}{13}(5 - 13a) = \frac{25}{13} - 5a$ ,  $EG = FQ = \frac{12}{13}(5 - 13a) = \frac{60}{13} - 12a$ ,

$\therefore EQ = FG = AC - AG - CF = 13 - (\frac{144}{13} - 12a) - (\frac{25}{13} - 5a) = 17a$ ,

在 $Rt\triangle PQE$ 中,  $PE = PG + EG = \frac{60}{13} - 12a + \frac{60}{13} - 12a = \frac{120}{13} - 17a$ ,

$PQ^2 = PE^2 + EQ^2 = (17a)^2 + (\frac{120}{13} - 17a)^2 = 2 \times 289a^2 - 2 \times \frac{120}{13} \times 17a + (\frac{120}{13})^2$ ,

$\therefore$ 当 $a = \frac{60}{13 \times 17}$ 时,  $PQ$ 最小,此时,  $PE = \frac{60}{13}$ ,  $EQ = \frac{60}{13}$ ,  $\therefore PQ = \frac{60\sqrt{2}}{13}$ ,故答案为:  $\frac{60\sqrt{2}}{13}$ 。



看到题目第一反应几何可以做,所以把题目抛给了李晨老师,随即几何解法来了,平四的构造堪称帅!

解法二:几何解法

首先是转化,双动转化为单动,如图1,巧妙利用平行四边形,

将 $PQ$ 转化到 $BE$ ,

作法:过 $Q$ 作 $QE \parallel BP$ ,且取 $QE = B'Q = BP$ ,

则四边形 $BPQE$ 是平四,  $PQ = BE$ ,

那么问题来了,  $BE$ 的最小值是多少呢?

那就落到单线段最值(一定一动型),找出动点的运动轨迹上了,

下一个问题:  $E$ 的轨迹是?

由图1,可以看到 $B'Q = QE$ ,此处应该有个等腰,

那么 $BE$ 的方向是否确定呢?

过 $C$ 作 $CF \parallel AB$ ,交 $B'E$ 的延长线于 $F$ ,易证 $CF = B'C$ ,

故 $F$ 是个定点,  $E$ 在定直线 $B'F$ 上运动!

最后一个问题?  $BE$ 的最小值如何求呢?

(学会简化图形,如图2)

$CF = \sqrt{2}BC = 5\sqrt{2}$ ,

$\sin \angle BFE = \sin \angle BCQ = \frac{12}{13}$ ,

$BE = BF \cdot \sin \angle BFE = 5\sqrt{2} \times \frac{12}{13} = \frac{60\sqrt{2}}{13}$ 。

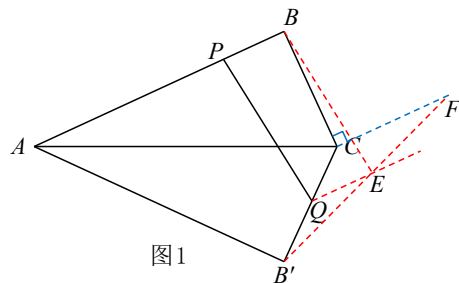


图1

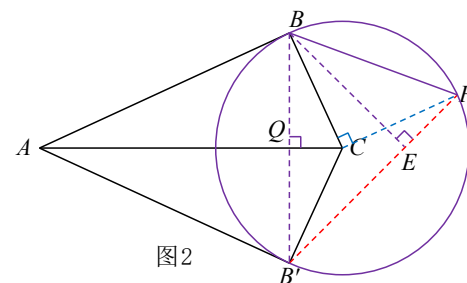


图2

ps:好不容易编辑完了上面一串解法的故事,钱乐老师(公众号:旋转的初中生)说可以稍作简化:

易证:  $\angle BB'E = 45^\circ$ , 则  $BE = \frac{\sqrt{2}}{2} BB' = \frac{60\sqrt{2}}{13}$ . 堪称一个妙!

妙+帅=无敌!  $\approx$  生生数学+旋转的初中生=无敌plus! (今天讲故事太累了,允许我调皮一下)

最后小编说:千万不要跟我说不会求 $BB'$ ,那你该回初二进修了!