

2025 春季初三数学每日一题打卡 001

001 试题来源：2024 春南京建邺区二模第 27 题

千姿百态的桥

问题：景区计划在半径为 1km 的人工湖 $\odot O$ 上修建景观桥，为容纳更多游客赏景休闲，需要景观桥长度最大． 现有以下三种设计方案，分别求出每种设计方案中桥长的最大值，景观桥的宽度忽略不计．

“X 型”

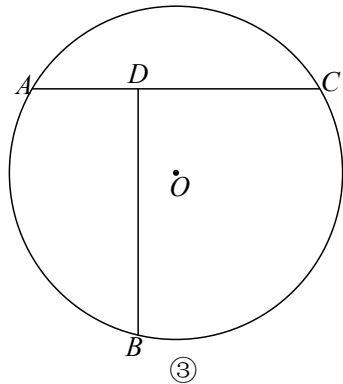
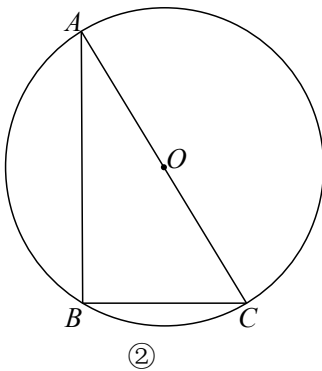
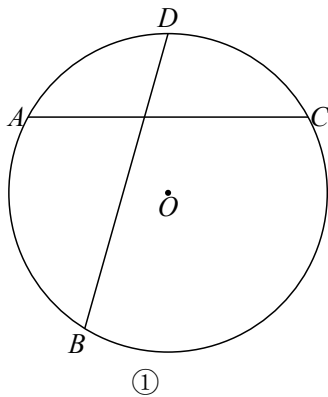
(1) 如图①，若点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上，则 $AC + BD$ 的最大值为 _____ km；

“L 型”

(2) 如图②，若点 A, B, C 在 $\odot O$ 上，且 $AB \perp BC$ ． 求 $AB + BC$ 的最大值；

“T 型”

(3) 如图③，若点 A, B, C 在 $\odot O$ 上，且 $AC \perp BD$ ，垂足为 D ，则 $AC + BD$ 的最大值为 _____ km．



试题解析

“X型”

(1) 如图①, 若点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上, 则 $AC + BD$ 的最大值为 4 km;

“L型”

(2) 如图②, 若点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, 且 $AB \perp BC$. 求 $AB + BC$ 的最大值;

“T型”

(3) 如图③, 若点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, 且 $AC \perp BD$, 垂足为 D , 则 $AC + BD$ 的最大值为 $(\sqrt{5} + 1)$ km.

【解答】解: (1) 如图①,

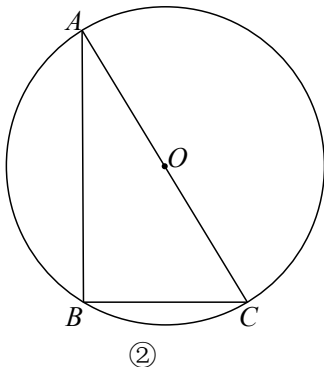
\because 圆内最大弦为圆的直径,

\therefore 当 AC 和 BD 均为直径时 $AC + BD$ 的最大,

\because 圆的半径为 1km,

\therefore 最大值为 4km, 故答案为: 4;

(2) 如图②



设 $BC = a$ km, $AB = b$ km,

在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$\because AC = 2$ km,

$\therefore a^2 + b^2 = 4$,

$\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$,

$\therefore (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + 4$,

\therefore 当 ab 最大时, $a + b$ 最大,

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab$,

$\therefore ab = 2S$,

\therefore 当 S 最大时, ab 最大,

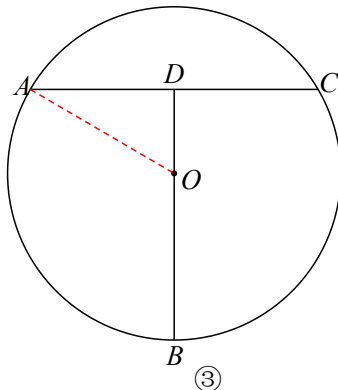
当 $\triangle ABC$ 以 AC 为底时, 点 B 位于 \widehat{AC} 中点处时, S 最大,

此时 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AB = BC = 2\cos 45^\circ = \sqrt{2}$ (km),

$\therefore AB + BC$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$ km;

(3) 如图③,



连接 OA , $\because BD \perp AC$,

$\therefore AD = CD$,

设 $AD = CD = x$, $AC + OD = m$

$\therefore OD = m - 2x$,

在 $Rt\triangle OAD$ 中,

$\because OA = 1$ km,

$\therefore OD^2 + AD^2 = OA^2$, 即 $x^2 + (m - 2x)^2 = 1^2$,

$\therefore 5x^2 - 4mx + m^2 - 1 = 0$

$\because \Delta = (-4m)^2 - 4 \times 5(m^2 - 1) \geq 0$,

$\therefore -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$,

$\therefore 0 \leq m \leq \sqrt{5}$,

$\therefore m$ 的最大值为 $\sqrt{5}$,

$\because OB = 1$ km,

$\therefore AC + BD$ 的最大值为 $(\sqrt{5} + 1)$ km.