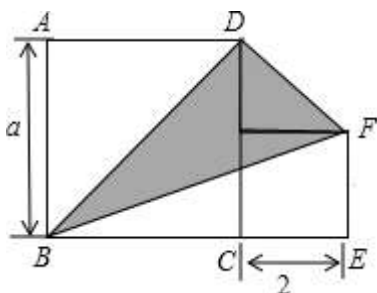


2024年12月月考初一数学定心卷

参考答案与试题解析

一、列代数式

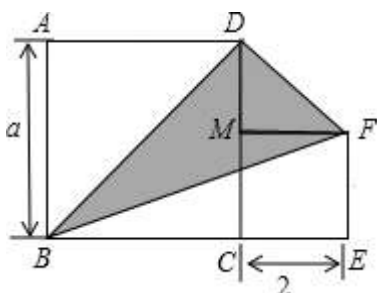
1. 如图,边长为 a 和 2 的两个正方形拼在一起,阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}a^2$.



【解答】解:如图所示:阴影部分的面积为:

$$S_{\triangle DBC} + S_{\text{梯形} DCEF} - S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(a+2) \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times (a+2) = \frac{1}{2}a^2,$$

故答案为: $\frac{1}{2}a^2$



2. 某排球比赛的积分规则为:比赛中以 3:0(胜 3 局负 0 局)或者 3:1 取胜的球队积 3 分,负队积 0 分;比赛中以 3:2 取胜的球队积 2 分,负队积 1 分. 若 n (n 是正整数, $n > 1$) 支排球队进行单循环比赛(参赛的每两个队之间都要比赛一场),则比赛结束后所有球队的积分的和为 $\frac{3}{2}n(n-1)$ 分. (用含 n 的代数式表示)

【解答】解:依题意可得:每支球队需与其他 $(n-1)$ 支球队比赛一场,总共进行 $\frac{n(n-1)}{2}$ 场比赛,

因为每场比赛无论结果如何,积分总和都为 3 分,

所以所有球队的总积分等于比赛场次乘以每场比赛的积分,即 $\frac{3n(n-1)}{2}$ 分.

故答案为: $\frac{3n(n-1)}{2}$.

二、代数式求值

3. 已知代数式 $x^2 - 2y + 1$ 的值是 -2 ,则代数式 $2 - 2x^2 + 4y$ 的值是 8 .

【解答】解: $\because x^2 - 2y + 1 = -2,$

$$\therefore x^2 - 2y = -3,$$

$$\therefore \text{当 } x^2 - 2y = -3 \text{ 时, 原式} = -2(x^2 - 2y) + 2 = -2 \times (-3) + 2 = 8.$$

故答案为: 8.

4. 小明在计算机上设置了一个运算程序:任意输入一个自然数,若它是奇数,则乘以 3 加上 1,若它是偶数,则除以 2. 通过对输出结果的观察,他发现了一个有意思的现象:无论输入的自然数是多少,按此规则经过若干次运算后可得到 1. 例如:如图所示,输入自然数 5,最少经过 5 次运算后可得到 1. 如果一个自然数 a 恰好经过 7 次运算后得到 1,则所有符合条件的 a 最小值为 3 .

$$5 \xrightarrow{\times 3 + 1} 16 \xrightarrow{\div 2} 8 \xrightarrow{\div 2} 4 \xrightarrow{\div 2} 2 \xrightarrow{\div 2} 1$$

【解答】解:如图,偶数 $64 = 3 \times 21 + 1$, $16 = 3 \times 5 + 1$,

① 128 → ② 64 → ③ 32 → ④ 16 → ⑤ 8 → ⑥ 4 → ⑦ 2 → 1

(1) 得数为 64 之前输入的数为偶数时, 则 $a = 64 \times 2 = 128$,

得数为 64 之前输入的数为奇数时, 则 $3a + 1 = 64$, 即 $a = 21$,

(2) 当得数为 16 之前输入的数为奇数时, 则第一次计算的结果为 10,

于是, $a = 10 \times 2 = 20$, 或 $3a + 1 = 10$, 即 $a = 3$,

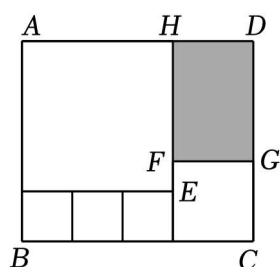
综上所述 a 的值为 128, 21, 20, 3, 共 4 个, 最小的 a 值为 3.

故答案为: 3.

5. 如图, 用三种大小不同的 4 个正方形和 1 个长方形 (阴影部分) 拼成长方形 $ABCD$, 其中 $EF = 2$, 最小的正方形的边长为 x .

(1) $FG = x + 2$, $DG =$ _____; (用含 x 的代数式表示)

(2) 用含 x 的代数式表示长方形 $ABCD$ 的周长, 并求当 $x = 3$ 时长方形 $ABCD$ 的周长.



【解答】解: (1) $\because EF = 2$, 最小的正方形的边长为 x .

$\therefore FG = x + 2$, $DG = 3x - 2$,

故答案为: $x + 2$; $3x - 2$;

(2) 根据题意, 大长方形的周长为: $2(4x + 2) + 2(x + 2 + 3x - 2) = 8x + 4 + 8x = 16x + 4$,

当 $x = 3$ 时, 大长方形的周长为: $16 \times 3 + 4 = 52$.

6. 若 $x = m$ 时, 代数式 $ax^2 + bx + c$ 的值也为 m , 则称 m 是这个代数式的“ x 优值”. 例如, 当 $x = 0$ 时, 代数式 $x^2 - x$ 的值为 0; 当 $x = 2$ 时, 代数式 $x^2 - x$ 的值为 2, 所以 0 和 2 都是 $x^2 - x$ 的“ x 优值”.

(1) 代数式 x^2 的“ x 优值”是 0 和 1;

(2) 判断代数式 $x^2 - x + n^2 + 2$ 是否存在“ x 优值”, 并说明理由;

(3) 代数式 $x^2 - n^2 + n$ 存在两个“ x 优值”且差为 5, 求 n 的值.

【解答】解: (1) \because 当 $x = 0$ 时, 代数式 x^2 的值为 0,

当 $x = 1$ 时, 代数式 x^2 的值为 1,

$\therefore 0$ 和 1 都是 x^2 的“ x 优值”.

故答案为: 0 和 1;

(2) 不存在“ x 优值”. 理由如下:

假设存在优值为 x , 则有 $x^2 - x + n^2 + 2 = x$,

整理得: $x^2 - 2x + n^2 + 2 = 0$,

则 $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(n^2 + 2) = -4n^2 - 4$,

\because 无论 n 取何值时, $-4n^2 - 4 < 0$,

\therefore 方程没有实数根, 即代数式 $x^2 - x + n^2 + 2$ 不存在“ x 优值”.

(3) 设“ x 优值”为 x , 则有 $x^2 - n^2 + n = x$,

整理得: $x^2 - x - n(n - 1) = 0$,

$\therefore (x - n)(x + n - 1) = 0$,

$\therefore x_1 = n, x_2 = 1 - n$.

\because 两个“ x 优值”差为 5,

$\therefore n - (1 - n) = 5$ 或 $(1 - n) - n = 5$,

$\therefore n = 3$ 或 $n = -2$.

7. 观察表格

x	...	-2	-1	0	1	2
$-x-2$	0	-1	-2	-3	a
$2x-2$	-6	-4	b	0	2	...
$2x+1$	-3	-1	1	3	5

(1) $a = \underline{\quad\quad} - 4 \underline{\quad\quad}$, $b = \underline{\quad\quad}$;

(2) 用文字语言表述代数式 $2x+1$ 的值随 x 的变化规律 $\underline{\quad\quad}$;

(3) 下列判断:

①当 $x=-1$ 时, $-x-2=2x+1$;

②当 $x=-2$ 时, $2x+1=2(2x-2)$;

③当 $x=1$ 时, $-x-2+2x+1=2x-2$;

④当 $x>0$ 时, $-x-2<2x-2$. 其中所有正确结论的序号是 $\underline{\quad\quad}$;

(4) 若 $|2x+1|>|2x-2|$, 直接写出 x 的取值范围.

【解答】解: (1) 根据表格, 当 $x=2$ 时, $-x-2=-2-2=-4$,

$\therefore a=-4$; 当 $x=0$ 时, $2x-2=-2$,

$\therefore b=-2$,

故答案为: -4 ; -2 ;

(2) 代数式 $2x+1$ 的值随 x 的变化规律: x 的值每增加 1, $2x+1$ 值随之增加 2;

(3) 观察表格, 计算:

①当 $x=-1$ 时, $-x-2=-1$, $2x+1=-1$, 故 $-x-2=2x+1$, 正确;

②当 $x=-2$ 时, $2x+1=-3$, $2(2x-2)=2\times(-6)=-12$, 故 $2x+1\neq 2(2x-2)$, 错误;

③当 $x=1$ 时, $-x-2+2x+1=-3+3=0$, $2x-2=0$, 故 $-x-2+2x+1=2x-2$, 正确;

④当 $x>0$ 时, $-x-2-(2x-2)=-x-2-2x+2=-3x<0$, 故 $-x-2<2x-2$, 正确;

故答案为: ①③④;

(4) $|2x+1|>|2x-2|$,

$2\left|x+\frac{1}{2}\right|>2|x-1|$,

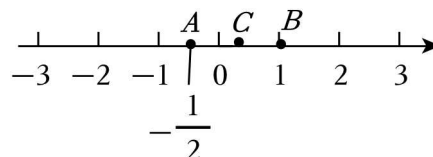
$\left|x+\frac{1}{2}\right|>|x-1|$,

$\therefore \left|x+\frac{1}{2}\right|$ 表示到 $-\frac{1}{2}$ 的距离, $|x-1|$ 表示到 1 的距离,

结合数轴可以发现, 当 $x=\frac{1}{4}$ 时, 到 $-\frac{1}{2}$ 和到 1 的距离相等,

$\therefore x>\frac{1}{4}$ 时, $\left|x+\frac{1}{2}\right|>|x-1|$,

$\therefore |2x+1|>|2x-2|$ 的 x 的取值范围为: $x>\frac{1}{4}$.



三、同类项

8. 若 $3x^{m-1}y^3$ 与 $-5xy^3$ 是同类项, 则 $m = \underline{\quad 2 \quad}$.

【解答】解: $\because 3x^{m-1}y^3$ 与 $-5xy^3$ 是同类项,

$\therefore m-1=1$,

解得: $m=2$.

故答案为: 2.

9. 若 $-2x^3y^m$ 与 $3x^ny^2$ 是同类项, 则 $m+n = \underline{\quad 5 \quad}$.

【解答】解: $\because -2x^3y^m$ 与 $3x^ny^2$ 是同类项,

$\therefore n=3, m=2$,

$\therefore m+n=5$,

故答案为5.

四、合并同类项

10. 若关于 x 的多项式 $3x + 2kx - 1 - x^2$ 中不含有 x 的一次项, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}} - \frac{3}{2} \underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: \because 多项式 $3x + 2kx - 1 - x^2 = -x^2 + (2k + 3)x - 1$ 不含 x 的一次项,

$$\therefore 2k + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{3}{2}.$$

11. 已知单项式 $-2x^3y^2$ 与单项式 mx^3y^{n+1} 的和是 $4x^3y^2$, 则 $m - n = \underline{\hspace{2cm}} 5 \underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: \because 单项式 $-2x^3y^2$ 与单项式 mx^3y^{n+1} 的和为 $4x^3y^2$,

$$\therefore \begin{cases} -2 + m = 4 \\ n + 1 = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 6 \\ n = 1 \end{cases},$$

$$\therefore m - n = 6 - 1 = 5,$$

故答案为: 5.

五、去括号与添括号

12. 已知 $|a| = 3$, $|b| = 5$, 且满足 $a + b < 0$, 则 $2022(a - b) - 2023(a - b) = \underline{\hspace{2cm}} - 2 \underline{\hspace{2cm}}$ 或 $\underline{\hspace{2cm}} - 8 \underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: $\because |a| = 3$, $|b| = 5$, 且满足 $a + b < 0$,

$$\therefore a = 3 \text{ 或 } -3, b = -5.$$

$$\text{当 } a = -3, b = -5 \text{ 时, } a - b = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2,$$

$$\text{当 } a = 3, b = -5 \text{ 时, } a - b = 3 - (-5) = 3 + 5 = 8,$$

$$\text{则 } 2022(a - b) - 2023(a - b) = 2022 \times 2 - 2023 \times 2 = 2(2022 - 2023) = -2.$$

$$2022(a - b) - 2023(a - b) = 2022 \times 8 - 2023 \times 8 = 8(2022 - 2023) = -8$$

故答案为: -2 或 -8 .

13. 去括号: $-(a^2b + 2ab^2 - 3) = \underline{-a^2b - 2ab^2 + 3}$, $1 - 2(-3a^2 + 4ab - \frac{1}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: $-(a^2b + 2ab^2 - 3) = -a^2b - 2ab^2 + 3$,

$$1 - 2(-3a^2 + 4ab - \frac{1}{3}) = 1 + 6a^2 - 8ab + \frac{2}{3}.$$

$$\text{故答案为: } -a^2b - 2ab^2 + 3, 1 + 6a^2 - 8ab + \frac{2}{3}.$$

六、规律型: 数字的变化类

14. 设一列数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2024}$ 中任意三个相邻数之和都是 18, 已知 $a_6 = 15$, $a_{14} = 2x$, $a_{31} = x + 3$, 那么 $a_{2024} = \underline{\hspace{2cm}} 0 \underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: \because 一列数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2024}$ 中任意三个相邻数之和都是 18,

$$\therefore a_{3n+1} = a_1, a_{3n+2} = a_2, a_{3n+3} = a_3 (n \text{ 为正整数}),$$

$$\text{可以推出: } a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{3n+1},$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = \dots = a_{3n+2},$$

$$a_3 = a_6 = a_9 = \dots = a_{3n+3},$$

$$\therefore a_{31} = a_1 = x + 3, a_{14} = a_2 = 2x, a_6 = a_3 = 15,$$

$$\text{则 } x + 3 + 2x + 15 = 18,$$

$$\text{解得 } x = 0,$$

$$\therefore a_2 = 2x = 0,$$

$$\therefore 2024 = 674 \times 3 + 2,$$

$$\therefore a_{2024} = a_2 = 0.$$

故答案为：0.

15. 已知整数 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, 满足下列条件: $a_1 = 0, a_2 = -|a_1 + 1|, a_3 = -|a_2 + 2|, a_4 = -|a_3 + 3|, \dots$, 以此类推, 则 a_{2024} 的值为 - 1012 .

【解答】解: 由题意可得, $a_1 = 0$,

$$a_2 = -|a_1 + 1| = -1,$$

$$a_3 = -|a_2 + 2| = -1,$$

$$a_4 = -|a_3 + 3| = -2,$$

$$a_5 = -|a_4 + 4| = -2, \dots,$$

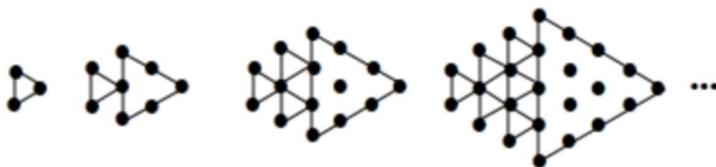
$$\therefore a_{2023} = -\frac{2023-1}{2} = -1011,$$

$$a_{2024} = -| -1011 + 2023 | = -1012.$$

故答案为: -1012.

七、规律型: 图形的变化类

16. 如图所示, 将形状、大小完全相同的“.”和线段按照一定规律摆成下列图形, 第1幅图形中“.”的个数为 a_1 , 第2幅图形中“.”的个数 a_2 , 第3幅图形中“.”的个数为 a_3 , \dots 以此类推, 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{18}}$ 的值为
 $\frac{531}{760}$.



第1幅图

第2幅图

第3幅图

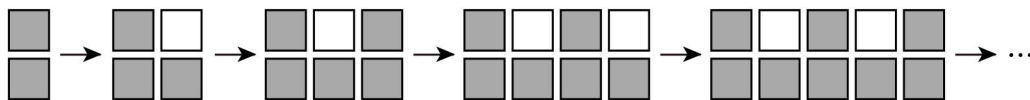
第4幅图

【解答】解: $\because a_1 = 3 = 1 \times 3, a_2 = 8 = 2 \times 4, a_3 = 15 = 3 \times 5, a_4 = 24 = 4 \times 6, \dots, a_n = n(n+2)$;

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{18}} \\ &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{18 \times 20} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{531}{380} \\ &= \frac{531}{760}, \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{531}{760}$.

17. 如图, 找出图形变化的规律, 则第20个图形中黑色小正方形的个数是 30.



第1个

第2个

第3个

第4个

第5个

【解答】解: 由所给图形可知,

$$\text{第2个图形中黑色小正方形的个数是: } 3 = \frac{2}{2} \times 3;$$

$$\text{第4个图形中黑色小正方形的个数是: } 6 = \frac{4}{2} \times 3;$$

$$\text{第6个图形中黑色小正方形的个数是: } 9 = \frac{6}{2} \times 3; \dots,$$

$$\therefore \text{第} 2n \text{个图形中黑色小正方形的个数是 } 3n \text{ 个 } (n \text{ 为正整数}),$$

$$\text{当 } 2n = 20, \text{ 即 } n = 10 \text{ 时, } 3n = 30 (\text{个}),$$

即第20个图形中黑色小正方形的个数是30个.

故答案为: 30.

八、多项式

18. 多项式 $\frac{1}{5}x^2y^{|m|} - (m+1)y + \frac{1}{7}$ 是关于 x, y 的三次二项式, 则 m 的值是 - 1 .

【解答】解: \because 多项式 $\frac{1}{5}x^2y^{|m|} - (m+1)y + \frac{1}{7}$ 是关于 x, y 的三次二项式,

$$\therefore |m| + 2 = 3, m + 1 = 0,$$

解得: $m = -1$.

故答案为: -1.

19. 如果多项式 $3x^{|n|+1} - (n-1)x + 1$ 是关于 x 的二次三项式, 则 $n =$ - 1 .

【解答】解: \because 多项式 $3x^{|n|+1} - (n-1)x + 1$ 是关于 x 的二次三项式,

$$\therefore |n| + 1 = 2, -(n-1) \neq 0,$$

$$\therefore n = -1.$$

故答案为: -1.

20. 如果关于 x, y 的多项式 $\frac{1}{5}x^2y^{|m|} - (m-1)y - (n+2)xy + \frac{1}{3}$ 是三次三项式, 试探讨 m, n 的取值情况.

【解答】解: 由题意可得: $2 + |m| = 3$,

解得 $m = 1$ 或 -1 ,

当 $m = 1$ 时, $n \neq -2$;

当 $m = -1$ 时, $n = -2$.

21. 如图: 在数轴上点 A 表示数 a , 点 B 表示数 b , 点 C 表示数 c , a 是多项式 $-2x^2 - 4x + 1$ 的一次项系数, b 是绝对值最小的整数, 单项式 $-\frac{1}{2}x^2y^4$ 的次数为 c .



(1) $a =$ - 4 , $b =$, $c =$;

(2) 若将数轴在点 B 处折叠, 则点 A 与点 C 重合 (填“能”或“不能”);

(3) 点 A, B, C 开始在数轴上运动, 若点 C 以每秒 1 个单位长度的速度向右运动, 同时, 点 A 和点 B 分别以每秒 3 个单位长度和 2 个单位长度的速度向左运动, t 秒钟后, 若点 A 与点 B 之间的距离表示为 AB , 点 B 与点 C 之间的距离表示为 BC , 则 $AB =$, $BC =$ (用含 t 的代数式表示);

(4) 请问: $AB + BC$ 的值是否随着时间 t 的变化而改变? 若变化, 请说明理由; 若不变, 请求其值.

【解答】解: (1) 由题意可知: $a = -4$, $b = 0$, $c = 6$,

(2) 不能重合, 由于 -4 与 6 的中点为 1 , 故将数轴在点 B 处折叠, 则点 A 与点 C 不能重合;

(3) 由于点 A 和点 B 分别以每秒 3 个单位长度和 2 个单位长度的速度向左运动,

$\therefore t$ 秒钟后, $AB = -2t - [(-4) - 3t] = t + 4$ 由于点 C 以每秒 1 个单位长度的速度向右运动,

$\therefore t$ 秒钟后, $BC = 6 + t - (-2t) = 3t + 6$;

(4) $AB + BC = t + 4 + 3t + 6 = 4t + 10$.

$\therefore AB + BC$ 的值会随着时间 t 的变化而改变.

故答案为: $-4, 0, 6$; 不能; $t + 4, 3t + 6$.

九、整式的加减

22. 一个四位自然数 M 的千位为 a , 百位为 b , 十位为 c , 个位为 d , 其中 a, b, c, d 互不相同且均不为 0, 小明发现部分 M 满足 $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} = 99$, 他称这样的四位数为“小明数”. 例如: 四位数 3762, $\because 37 + 62 = 99$, $\therefore 3762$ 是“小明数”. 最大的“小明数”是 8712; 去掉十位数字 c 得到新三位数 M' , 则满足 $\frac{M + M' - 2a}{10}$ 为正整数的最小“小明数”是 .

【解答】解: $\because \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} = 99$,

$$\therefore 10a + b + 10c + d = 99,$$

$$\therefore 10(a+c) + (b+d) = 10 \times 9 + 9,$$

$$\therefore a+c=9, b+d=9,$$

又 $\because 0 < a \leq 9, 0 < b \leq 9, 0 < c \leq 9, 0 < d \leq 9$, a, b, c, d 为整数且互不相同,

\therefore 当 a, b 为最大时, 这个“小明数” M 为最大,

又 \because 当 $a=9$ 时, 则 $c=9-a=0$, 不合题意,

$$\therefore \text{当 } a=8, \text{ 则 } c=9-8=1,$$

此时 $b=7$, 则 $d=9-7=2$,

\therefore 最大的“小明数”是: 8712;

依题意得: $M=1000a+100b+10c+d$, $M'=100a+10b+d$,

$$\therefore M+M'-2a=1098a+110b+10c+2d,$$

由 (1) 知: $a+c=9, b+d=9$,

$$\therefore c=9-a, d=9-b,$$

$$\therefore M+M'-2a=1098a+110b+10(9-a)+2(9-b)$$

$$=1088a+108b+108$$

$$=10(108a+10b+10)+8a+8b+8,$$

$$\therefore \frac{M+M'-2a}{10} = \frac{10(108a+10b+10)+8a+8b+8}{10} = 108a+10b+10 + \frac{8a+8b+8}{10},$$

又 $\because 0 < a \leq 9, 0 < b \leq 9, 0 < c \leq 9, 0 < d \leq 9$, a, b, c, d 为整数且互不相同, $\frac{M+M'-2a}{10}$ 为正整数,

$\therefore 8a+8b+8$ 能被 10 整除, 设 $8a+8b+8=10k$, k 为正整数

$\therefore k = \frac{4(a+b+1)}{5}$ 为正整数, 要使“小明数” M 为最小, 则 k 为最小,

$$\therefore a+b+1=5,$$

$\therefore a+b=4$, 要使“小明数” M 为最小, 则 a 为最小, 当 $a=1$ 时, $b=3$, 此时“小明数” M 为最小,

$$\therefore c=9-a=8, d=9-b=6,$$

$$\therefore M=1386.$$

故答案为: 8712; 1386.

23. 定义: 若 $a+b=n$, 则称 a 与 b 是关于数 n 的“平衡数”. 比如 3 与 -4 是关于 -1 的“平衡数”, 5 与 12 是关于 17 的“平衡数”. 现有 $a=6x^2-8kx+4$ 与 $b=-2(3x^2-2x+k)$ (k 为常数) 始终是数 n 的“平衡数”, 则它们是关于 3 的“平衡数”.

【解答】解: 根据题中的新定义得: $a+b=n$,

$$\therefore 6x^2-8kx+4-2(3x^2-2x+k)=n, \text{ 即 } (4-8k)x+4-2k=n,$$

$\therefore a=6x^2-8kx+4$ 与 $b=-2(3x^2-2x+k)$ (k 为常数) 始终是数 n 的“平衡数”,

$$\therefore 4-8k=0, \text{ 解得: } k=\frac{1}{2},$$

$$\therefore n=4-1=3,$$

则它们是关于 3 的“平衡数”.

故答案为: 3.

十、整式的加减—化简求值

24. 关于 x, y 的多项式 $x^2+ax-y+b$ 与多项式 $bx^2-3x+6y-3$ 的差的值与字母 x 的取值无关, 则代数式 $3(a^2-2ab-7)-(4a^2+ab+b^2)$ 的值为 -10.

【解答】解: $x^2+ax-y+b-(bx^2-3x+6y-3)$

$$=x^2+ax-y+b-bx^2+3x-6y+3$$

$$=(1-b)x^2+(a+3)x-7y+b+3,$$

\therefore 关于 x, y 的多项式 $x^2+ax-y+b$ 与多项式 $bx^2-3x+6y-3$ 的差的值与字母 x 的取值无关,

$$\therefore 1-b=0, a+3=0,$$

$$\therefore a=-3, b=1;$$

$$\begin{aligned}
& 3(a^2 - 2ab - 7) - (4a^2 + ab + b^2) \\
&= 3a^2 - 6ab - 21 - 4a^2 - ab - b^2 \\
&= -a^2 - 7ab - b^2 - 21; \\
&\text{当 } a = -3, b = 1 \text{ 时, 原式} = -(-3)^2 - 7 \times (-3) \times 1 - 1^2 - 21 \\
&= -9 + 21 - 1 - 21 \\
&= -10.
\end{aligned}$$

25. 已知 $A = 2x^2 + ax - 7$, $B = bx^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$. 当 $A - 2B$ 的值与 x 无关时, $a + b = \underline{\hspace{2cm}} - 2 \underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: $A - 2B = (2x^2 + ax - 7) - 2(bx^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2})$

$$\begin{aligned}
&= 2x^2 + ax - 7 - 2bx^2 + 3x + 5 \\
&= (2 - 2b)x^2 + (a + 3)x - 2, \\
&\because A - 2B \text{ 的值与 } x \text{ 无关,} \\
&\therefore 2 - 2b = 0, a + 3 = 0, \\
&\therefore a = -3, b = 1, \\
&\therefore a + b = -2,
\end{aligned}$$

故答案为: -2 .

26. 给出定义如下: 我们称使等式 $a - b = ab + 1$ 的成立的一对有理数 a, b 为“相伴有理数对”, 记为 (a, b) .

如: $3 - \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} + 1$, $5 - \frac{2}{3} = 5 \times \frac{2}{3} + 1$, 所以数对 $(3, \frac{1}{2})$, $(5, \frac{2}{3})$ 都是“相伴有理数对”.

(1) 数对 $(-2, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}, -3)$ 中, 是“相伴有理数对”的是 $(-\frac{1}{2}, -3)$;

(2) 若 $(x + 1, 5)$ 是“相伴有理数对”, 则 x 的值是 ;

(3) 若 (a, b) 是“相伴有理数对”, 求 $3ab - a + \frac{1}{2}(a + b - 5ab) + 1$ 的值.

【解答】解: (1) 由题意可得: 当 $a = -2$, $b = \frac{1}{3}$ 时,

$$\begin{aligned}
&a - b = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}, \\
&ab + 1 = -2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3}, \text{ 则 } a - b \neq ab + 1, \\
&\therefore (-2, \frac{1}{3}) \text{ 不是“相伴有理数对”, 当 } a = -\frac{1}{2}, b = -3 \text{ 时, } a - b = -\frac{1}{2} - (-3) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}, \\
&ab + 1 = -\frac{1}{2} \times (-3) + 1 = \frac{5}{2}, \text{ 则 } a - b = ab + 1, \\
&\therefore (-\frac{1}{2}, -3) \text{ 是“相伴有理数对”,} \\
&\therefore \text{数对 } (-2, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{2}, -3) \text{ 中, 是“相伴有理数对”的是 } (-\frac{1}{2}, -3), \\
&\text{故答案为: } (-\frac{1}{2}, -3);
\end{aligned}$$

(2) $\because (x + 1, 5)$ 是“相伴有理数对”,

$$\therefore x + 1 - 5 = (x + 1) \times 5 + 1, \text{ 解得 } x = -\frac{5}{2},$$

故答案为: $-\frac{5}{2}$;

$$(3) 3ab - a + \frac{1}{2}(a + b - 5ab) + 1$$

$$= 3ab - a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{5}{2}ab + 1$$

$$= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + 1$$

$$= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(a - b) + 1,$$

$$\because a - b = ab + 1,$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(ab+1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

27. 已知 $A = 2x - 4xy + 7y$, $B = 2y - xy - \frac{1}{2}x$.

(1) 化简 $A - 2B$;

(2) 当 $x + y = \frac{1}{3}$, $xy = -2$, 求 $A - 2B$ 的值;

(3) 若 $A - 2B$ 的值与 y 的取值无关, 求 $A - 2B$ 的值.

【解答】解: (1) $\because A = 2x - 4xy + 7y$, $B = 2y - xy - \frac{1}{2}x$,

$$\begin{aligned}\therefore A - 2B &= (2x - 4xy + 7y) - 2\left(2y - xy - \frac{1}{2}x\right) \\ &= 2x - 4xy + 7y - 4y + 2xy + x \\ &= 3x - 2xy + 3y;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 当 } x + y &= \frac{1}{3}, xy = -2, A - 2B = 3(x + y) - 2xy \\ &= 3 \times \frac{1}{3} - 2 \times (-2) = 5;\end{aligned}$$

$$(3) A - 2B = 3x - 2xy + 3y = 3x + (-2x + 3)y,$$

$\because A - 2B$ 的值与 y 的取值无关,

$$\therefore -2x + 3 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore A - 2B = 3 \times \frac{3}{2} + 0 = \frac{9}{2}.$$

28. 先化简, 再求值 $4xy^2 - \frac{1}{2}(x^3y + 4xy^2) - 2\left[\frac{1}{4}x^3y - (x^2y - xy^2)\right]$, 其中 $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$.

【解答】解: $\because x = \frac{1}{2}$, $y = -2$,

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= 4xy^2 - \frac{1}{2}x^3y - 2xy^2 - \frac{1}{2}x^3y + 2x^2y - 2xy^2 \\ &= -x^3y + 2x^2y \\ &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

十一、方程的解

29. 小红在解关于 x 的方程: $-3x + 1 = 3a - 2$ 时, 误将方程中的“ -3 ”看成了“ 3 ”, 求得方程的解为 $x = 1$, 则原方程的解为 $x = -1$.

【解答】解: 把 $x = 1$ 代入 $3x + 1 = 3a - 2$, 得 $3 + 1 = 3a - 2$,

解得 $a = 2$, 故原方程为 $-3x + 1 = 6 - 2$, $-3x = 3$, 解得 $x = -1$.

故答案为: $x = -1$.

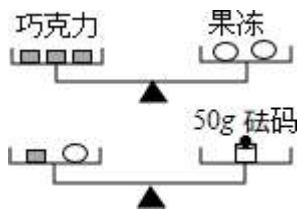
30. 若 $x = 3$ 是方程 $2x - 10 = 4a$ 的解, 则 $a =$ -1 .

【解答】解: 把 $x = 3$ 代入方程得到: $6 - 10 = 4a$ 解得: $a = -1$.

故填: -1 .

十二、等式的性质

31. 如图所示的两架天平保持平衡, 且每块巧克力的质量相等, 每个果冻的质量也相等, 则一个果冻的质量为 30 克.

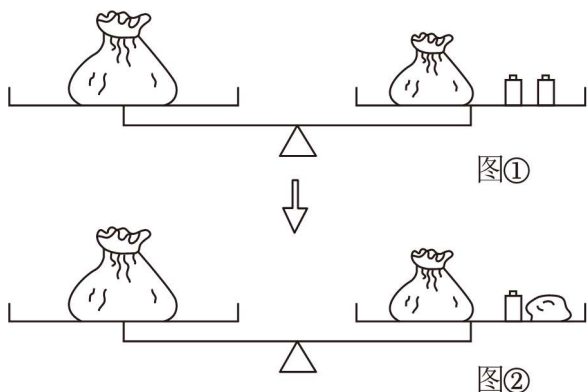


【解答】解：设巧克力的质量为 x 克，果冻的质量为 y 克。则 $\begin{cases} 3x=2y \\ x+y=50 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=20 \\ y=30 \end{cases}$ ，

答：一个果冻的质量为 30 克。

故答案为：30。

32. 图 (①) 的等臂天平呈平衡状态，其中左侧秤盘有一袋石头，右侧秤盘有一袋石头和 2 个各 20 克的砝码。将左侧袋中一颗石头移至右侧秤盘，并拿走右侧秤盘的 1 个砝码后，天平仍呈平衡状态，如图 (②) 所示。则被移动石头的重量是 10 克。



【解答】解：设左天平的一袋石头重 x 克，右天平的一袋石头重 y 克，被移动的石头重 z 克，由题意，得：

$$\begin{cases} x=y+40 \\ x-z=y+z+20 \end{cases}, \text{解得：} z=10.$$

答：被移动石头的重量为 10 克。

故答案为：10。

十三、一元一次方程的定义

33. 已知 $(m-1)x^{|m|}-2022=2025$ 是关于 x 的一元一次方程，则 $m = \underline{\quad\quad} - 1 \underline{\quad\quad}$ 。

【解答】解：∵ $(m-1)x^{|m|}-2022=2025$ 是关于 x 的一元一次方程，

$$\therefore m-1 \neq 0 \text{ 且 } |m|=1, \text{解得：} m=-1,$$

故答案为：-1。

十四、一元一次方程的解

34. 已知关于 x 的一元一次方程 $m(x+1)+4n=6$ 的解是 $x=1$ ，则 $m+2n-3$ 的值为 0。

【解答】解：把 $x=1$ 代入方程 $m(x+1)+4n=6$ 中得， $2m+4n=6$ ，

$$\text{所以 } m+2n=3-3=0,$$

故答案为：0。

35. 已知 $x=3$ 是关于 x 的方程 $ax+2x-3=0$ 的解，则 a 的值为 -1。

【解答】解：将 $x=3$ 代入方程得： $3a+2 \times 3-3=0$ ，解得： $a=-1$ 。

故答案为：-1。

十五、解一元一次方程

36. 解方程：

$$(1) 2(3x-5)-3(4x-3)=0$$

$$(2) \frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} = 1.$$

【解答】解：(1) 去括号得： $6x-10-12x+9=0$ ，移项合并得： $-6x=1$ ，

解得： $x = -\frac{1}{6}$ ；

(2) 去分母得： $3x + 6 - 4x + 6 = 12$ ，

移项合并得： $x = 0$ 。

37. 解下列方程：

(1) $5x + 2 = 3x - 6$ ；

(2) $\frac{3x+6}{2} = \frac{2x-1}{3}$ 。

【解答】解：(1) $5x + 2 = 3x - 6$ ，

$$5x - 3x = -6 - 2,$$

$$2x = -8,$$

$$x = -4;$$

$$(2) \frac{3x+6}{2} = \frac{2x-1}{3},$$

$$3(3x+6) = 2(2x-1),$$

$$9x + 18 = 4x - 2,$$

$$9x - 4x = -2 - 18,$$

$$5x = -20,$$

$$x = -4.$$

38. 阅读材料：

把无限循环小数化为分数，可以按如下方法进行：以 $0.\dot{7}$ 为例，设 $0.\dot{7} = x$ ，由 $0.\dot{7} = 0.777 \dots$ ，可知， $10x = 7.777 \dots$ ，所以 $10x - x = 7$ 。解方程，得 $x = \frac{7}{9}$ ，于是 $0.\dot{7} = \frac{7}{9}$ 。解决问题：

(1) 请把无限循环小数 $0.\dot{6}\dot{8}$ 化为分数；

(2) 我们把纯循环小数 x (从有循环节小数部分第一位开始的循环小数) 循环节的数字组成的数记作 m ，循环节的位数记作 n (例如对 $0.\dot{6}\dot{8}$ 而言， $m = 68$ ， $n = 2$)。请你直接用含 m, n 的式子表示纯循环小数 $x = \frac{m}{10^n - 1}$ 。

【解答】解：(1) 设 $0.\dot{6}\dot{8} = x$ ，由 $0.\dot{6}\dot{8} = 0.686868 \dots$ ，可知 $100x = 68.686868 \dots$ ，

$$\therefore 100x - x = 68, \text{解得: } x = \frac{68}{99},$$

$$\therefore 0.\dot{6}\dot{8} = \frac{68}{99};$$

(2) 根据题意得： $(10^n - 1)x = m$ ，

$$\text{解得: } x = \frac{m}{10^n - 1}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{m}{10^n - 1}.$$

十六、含绝对值符号的一元一次方程

39. “数形结合”是一种非常重要的数学思想，它可以把抽象的数量关系与直观的几何图形结合起来解决问题。

探究：方程 $|x - 1| = 2$ ，可以用两种方法求解，将探究过程补充完整。

方法一当 $x - 1 > 0$ 时， $|x - 1| = x - 1 = 2$ ；

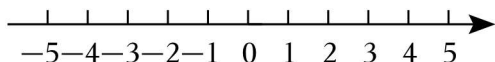
当 $x - 1 \leq 0$ 时， $|x - 1| = \underline{\quad\quad} 1 - x \underline{\quad\quad} = 2$ 。

方法二 $|x - 1| = 2$ 的意义是数轴上表示 x 的点与表示 $\underline{\quad\quad}$ 的点之间的距离是 2。

上述两种方法，都可以求得方程 $|x - 1| = 2$ 的解是 $\underline{\quad\quad}$ 。

应用：根据探究中的方法，求得方程 $|x - 1| + |x + 3| = 9$ 的解是 $\underline{\quad\quad}$ 。

拓展：方程 $|x - 1| - |-x - 3| = \frac{1}{2}$ 的解是 $\underline{\quad\quad}$ 。



【解答】解：探究：(方法一) 当 $x - 1 \leq 0$ 时， $|x - 1| = 1 - x = 2$ ，

故答案为: $1-x$.

(方法二) $|x-1|=2$ 的意义是数轴上表示 x 的点与表示 1 的点之间的距离是 2,

故答案为: 1.

\because 当 $x-1>0$ 时, $|x-1|=x-1=2$, 解得 $x=3$; 当 $x-1\leq 0$ 时, $|x-1|=1-x=2$, 解得 $x=-1$; 数轴上表示 3 或 -1 的点到表示 1 的点之间的距离是 2;

\therefore 上述两种方法, 都可以求得方程 $|x-1|=2$ 的解是 $x=3$ 或 $x=-1$.

故答案为: $x=3$ 或 $x=-1$.

应用: $\because |x-1|+|x+3|=9$ 的意义是数轴上表示 x 的点分别与表示 -3 和 1 的点距离之和为 9,

$\therefore x\leq -3$ 或 $x\geq 1$.

当 $x<-3$ 时, $|x-1|+|x+3|=1-x-(x+3)=9$, 即 $-2x-2=9$, 解得 $x=-\frac{11}{2}$;

当 $x>1$ 时, $|x-1|+|x+3|=x-1+x+3=9$, 即 $2x+2=9$, 解得 $x=\frac{7}{2}$.

综上, $x=-\frac{11}{2}$ 或 $x=\frac{7}{2}$,

故答案为: $x=-\frac{11}{2}$ 或 $x=\frac{7}{2}$.

拓展: $\because |x-1|-|-x-3|=|x-1|-|x+3|=\frac{1}{2}$ 的意义是数轴上表示 x 的点到表示 1 的点的距离与到表示 -3 的点的距离之差为 $\frac{1}{2}$,

$\therefore -3\leq x\leq 1$.

当 $-3\leq x\leq 1$ 时, $|x-1|-|-x-3|=|x-1|-|x+3|=1-x-(x+3)=\frac{1}{2}$, 即 $-2x-2=\frac{1}{2}$, 解得 $x=-\frac{5}{4}$,

故答案为: $-\frac{5}{4}$.

40. 小兵喜欢研究数学问题, 在学习一元一次方程后, 他给出一个新定义: 若 x_0 是关于 x 的一元一次方程 $ax+b=0$ 的解, y_0 是关于 y 的方程的所有解的其中一个解, 且 x_0, y_0 满足 $x_0+y_0=100$, 则称关于 y 的方程为关于 x 的一元一次方程的“友好方程”. 例如: 一元一次方程 $3x-2x-99=0$ 的解是 $x=99$, 方程 $y^2+1=2$ 的所有解是 $y=1$ 或 $y=-1$, 当 $y_0=1$ 时, $x_0+y_0=100$, 所以 $y^2+1=2$ 为一元一次方程 $3x-2x-99=0$ 的“友好方程”.

(1) 已知关于 y 的方程: ① $2y-2=4$, ② $|y|=2$, 哪个方程是一元一次方程 $3x-2x-102=0$ 的“友好方程”? 请直接写出正确的序号是 ②.

(2) 若关于 y 的方程 $|2y-2|+3=5$ 是关于 x 的一元一次方程 $x-\frac{2x-2a}{3}=a+1$ 的“友好方程”, 请求出 a 的值.

【解答】解: (1) 方程①的解为: $y=3$, 方程②的解为: $y=\pm 2$, 方程 $3x-2x-102=0$ 的解为: $x=102$.

$\because 3+102\neq 100, -2+102=100$.

\therefore 方程①不是方程 $3x-2x-102=0$ 的友好方程, 方程②是方程 $3x-2x-102=0$ 的友好方程.

故答案为: ②.

(2) $\because |2y-2|+3=5, |2y-2|=2$,

$\therefore 2y-2=2$ 或 $2y-2=-2$.

$\therefore y=2$ 或 $y=0$.

\because 方程 $x-\frac{2x-2a}{3}=a+1$,

$\therefore 3x-2x+2a=3a+3$.

$\therefore x=a+3$.

\therefore 两个方程是友好方程,

$\therefore 2+a+3=100$ 或 $0+a+3=100$.

$\therefore a=95$ 或 $a=97$.

十七、同解方程

41. 已知关于 x 的一元一次方程 $(m-6)x^2-2x+n=0$ 与 $x-(3-x)=1$ 的解相同, 求 m, n 的值.

【解答】解: $x-(3-x)=1, x-3+x=1$,

$$2x=4, x=2;$$

$\because (m-6)x^2 - 2x + n = 0$ 是关于 x 的一元一次方程,

$$\therefore m-6=0,$$

$$\therefore m=6;$$

$$\therefore -2x + n = 0. \text{ 将 } x=2 \text{ 代入 } -2x + n = 0, \text{ 得 } -4 + n = 0,$$

$$\text{解得 } n=4.$$

综上, $m=6, n=4$.

42. 已知关于 x 的方程 $x-a=2$ 的解与方程 $2(x-1)-5=3a$ 的解相等, 求 x 的值.

【解答】解: 解方程 $x-a=2$ 得 $x=a+2$,

把 $x=a+2$ 代入方程 $2(x-1)-5=3a$ 得:

$$2(a+2-1)-5=3a,$$

$$\text{即 } 2(a+1)-5=3a,$$

$$\text{去括号得 } 2a+2-5=3a,$$

$$\text{移项、合并同类项得 } a=-3,$$

$$\therefore x=a+2=-3+2=-1.$$

43. 先阅读下列解题过程, 然后解答问题 (1)、(2)

解方程: $|x+3|=2$.

解: 当 $x+3 \geq 0$ 时, 原方程可化为: $x+3=2$, 解得 $x=-1$;

当 $x+3 < 0$ 时, 原方程可化为: $x+3=-2$, 解得 $x=-5$.

所以原方程的解是 $x=-1, x=-5$.

(1) 解方程: $|3x-2|-4=0$;

(2) 探究: 当 b 为何值时, 方程 $|x-2|=b+1$ ①无解; ②只有一个解; ③有两个解.

【解答】答: (1) 当 $3x-2 \geq 0$ 时, 原方程可化为: $3x-2=4$,

解得 $x=2$;

当 $3x-2 < 0$ 时, 原方程可化为: $3x-2=-4$,

$$\text{解得 } x=-\frac{2}{3}.$$

所以原方程的解是 $x=2$ 或 $x=-\frac{2}{3}$;

(2) $\because |x-2| \geq 0$,

\therefore 当 $b+1 < 0$, 即 $b < -1$ 时, 方程无解;

当 $b+1=0$, 即 $b=-1$ 时, 方程只有一个解;

当 $b+1 > 0$, 即 $b > -1$ 时, 方程有两个解.

十八、由实际问题抽象出一元一次方程

44. 我国古代著作《九章算术》中记载了这样一个问题: “清明游园, 共坐八船, 大船满六, 小船满四, 三十八学子, 满船坐观. 请问客家, 大小几船?” 其大意为: “清明时节出去游园, 所有人共坐了 8 只船, 大船每只坐 6 人, 小船每只坐 4 人, 38 人刚好坐满, 问: 大小船各有几只?” 若设有 x 只小船, 可列方程为 $\underline{\hspace{2cm}} 6(8-x) + 4x = 38$ $\underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: \because 所有人共坐了 8 只船, 其中有 x 只小船,

\therefore 有 $(8-x)$ 只大船.

根据题意得: $6(8-x) + 4x = 38$.

故答案为: $6(8-x) + 4x = 38$.

十九、一元一次方程的应用

45. 已知数轴上 A, B, C 三点, 若点 C 在点 A, B 之间且 $CA=2CB$, 则称点 C 是 $\{A, B\}$ 的祁美点. 例如, 图 1 中, 点 A, B, C, D 表示的数分别为 $-2, 4, 2, 0$, 此时 $CA=2CB, DB=2DA$, 则点 C 是 $\{A, B\}$ 的祁美点, 点 D 是 $\{B, A\}$ 的祁美点.

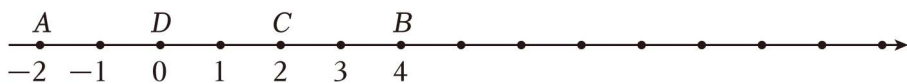


图1

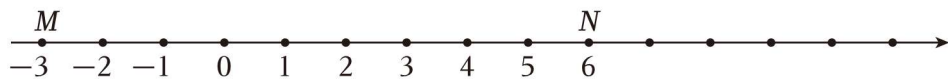


图2

(1) 如图2, 数轴上点 M, N 表示的数分别为 $-3, 6$, 若点 P 是 $\{M, N\}$ 的祁美点, 则点 P 表示的数是 3; 若点 Q 是 $\{N, M\}$ 的祁美点, 则点 Q 表示的数是 0;

(2) 已知点 A, B, C, D 在数轴上, 它们表示的数分别为数 a, b, c, d , 且 a, b 满足 $|a+16| + (b+4)^2 = 0$, 点 C 在点 B 的右侧且到点 B 的距离为 6 个单位长度, 点 D 表示的数是 12; 动点 P 从点 A 出发以 3 单位/秒的速度向右运动. 同时点 Q 从点 D 出发, 以 2 个单位/秒速度向左运动, B, C 两点之间为“变速区”, 规则为从点 B 运动到点 C 期间速度变为原来的 2 倍, 之后立刻恢复原速, 从点 C 运动到点 B 期间速度变为原来的一半, 之后立刻恢复原速, 假设运动时间为 t 秒.

①从 B 运动到 C 的过程中, 点 P 表示的数是 $6t-28$, 从 C 运动到 B 的过程中, 点 Q 表示的数是 $-t+7$; (用含 t 的代数式表示)

②求使得点 C 是 $\{P, Q\}$ 的祁美点的 t 值; 若不存在, 请说明理由.

【解答】解: (1) \because 数轴上点 M, N 表示的数分别为 $-3, 6$,

$$\therefore MN = 6 - (-3) = 9,$$

\because 点 P 是 $\{M, N\}$ 的祁美点,

$$\therefore PM = 2PN,$$

$$\therefore PM = \frac{2}{3}MN = 6,$$

$$\therefore P \text{ 表示的数为 } -3 + 6 = 3;$$

同理 $QN = 6$,

$$\therefore Q \text{ 表示的数为 } 6 - 6 = 0;$$

故答案为: 3, 0;

$$(2) \textcircled{1} \because |a+16| + (b+4)^2 = 0,$$

$$\therefore a+16=0, b+4=0,$$

$$\text{解得 } a=-16, b=-4,$$

\because 点 C 在点 B 的右侧且到点 B 的距离为 6 个单位长度,

$$\therefore c = -4 + 6 = 2,$$

根据题意, P 从 A 到 B 所需时间为 $[-4 - (-16)] \div 3 = 4$ (秒), Q 从 D 到 C 所需时间为 $(12-2) \div 2 = 5$ (秒),

\therefore 从点 B 运动到点 C 期间速度变为原来的 2 倍, 之后立刻恢复原速, 从点 C 运动到点 B 期间速度变为原来的一半,

$$\therefore \text{从 } B \text{ 运动到 } C \text{ 的过程中, 点 } P \text{ 表示的数是 } -4 + 2 \times 3(t-4) = 6t-28,$$

$$\text{从 } C \text{ 运动到 } B \text{ 的过程中, 点 } Q \text{ 表示的数是 } 2 - \frac{1}{2} \times 2(t-5) = -t+7;$$

故答案为: $6t-28, -t+7$;

②存在 t , 使 C 是 $\{P, Q\}$ 的祁美点,

$\because C$ 是 $\{P, Q\}$ 的祁美点,

$$\therefore CP = 2CQ,$$

P, Q 变速之前, $t \leq 4$,

$$\therefore 2 - (-16 + 3t) = 2(12 - 2t - 2),$$

$$\text{解得 } t=2,$$

P 变速后, Q 变速前, 即 $4 < t < 5$,

$$\therefore 2 - (6t - 28) = 2(12 - 2t - 2),$$

$$\text{解得 } t=5(\text{舍去});$$

当 $t=5$ 时, P, C, Q 重合, 不符合题意;

当 P 恢复原速, Q 变速后, $5 < t < 11$,

$$\therefore 3(t-5) = 2[2 - (-t+7)],$$

解得 $t=5$ (舍去);

当 P, Q 都恢复原速后, $t > 11$, Q 表示的数为 $-4 - 2(t-11) = -2t + 18$,

$$\therefore 3(t-5) = 2[2 - (-2t+18)],$$

解得 $t=17$,

综上所述, t 的值为 2 或 17.

46. 已知 M, N 两点在数轴上所表示的数分别为 m, n , 且 m, n 满足 $|m+8| + (n-1)^2 = 0$.

(1) 求 m, n 的值;

(2) ①有一个玩具火车 AB 如图 1 所示, 放置在数轴上, 将火车沿数轴左右水平移动, 当点 A 移动到点 B 时, 点 B 所对应的数为 n , 当点 B 移动到点 A 时, 点 A 所对应的数为 m . 则玩具火车的长为 3 个单位长度;

②如图 1 所示, 将第①题中的玩具火车沿数轴左右水平移动, 当 $MA:BN=2:1$ 时, 直接写出此时点 A 所表示的数;

(3) 在 (2) 的条件下, 当火车 AB 以每秒 2 个单位长度的速度向右运动, 同时点 P 和点 Q 从 M, N 出发, 分别以每秒 1 个单位长度和 3 个单位长度的速度向右运动, 记火车 AB 运动后对应的位置为 $A'B'$, 是否存在常数 k 使得 $2PQ + k \cdot B'A$ 的值与它们的运动时间无关? 若存在, 请求出 k 和这个定值; 若不存在, 请说明理由.

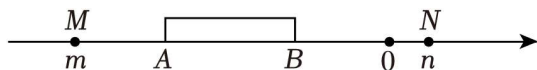
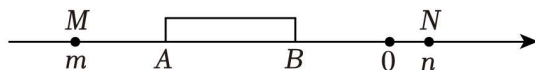


图1



备用图

【解答】解: (1) $\because |m+8| + (n-1)^2 = 0$,

$$\therefore m+8=0, n-1=0,$$

$$\therefore m=-8, n=1;$$

$$(2) \text{ ① } MN = |-8-1| = 9,$$

\therefore 当点 A 移动到点 B 时, 点 B 所对应的数为 n , 当点 B 移动到点 A 时, 点 A 所对应的数为 m ,

$$\therefore MA = AB = BN = \frac{1}{3}MN = 3,$$

\therefore 玩具火车的长为 3 个单位长度;

故答案为: 3;

②设 A 表示的数为 x , 则 B 表示的数为 $x+3$,

$$\therefore MA = |x - (-8)| = |x+8|, BN = |x+3-1| = |x+2|,$$

$$\therefore MA:BN = 2:1,$$

$$\therefore |x+8| = 2|x+2|,$$

$$\text{即 } x+8 = 2x+4 \text{ 或 } x+8 = -2x-4,$$

$$\text{解得 } x=4 \text{ 或 } x=-4;$$

$$\therefore A \text{ 表示的数为 } 4 \text{ 或 } -4;$$

(3) 存在常数 k 使得 $2PQ + k \cdot B'A$ 的值与它们的运动时间无关, 理由如下:

由 (2) ①知 A 表示的数为 $-8+3=-5$, B 表示的数 $-5+3=-2$,

\therefore 火车 AB 以每秒 2 个单位长度的速度向右运动, 运动后对应的位置为 $A'B'$,

$$\therefore A' \text{ 表示的数为 } -5+2t, B' \text{ 表示的数为 } -2+2t,$$

\therefore 点 P 和点 Q 从 M, N 出发, 分别以每秒 1 个单位长度和 3 个单位长度的速度向右运动,

$$\therefore P \text{ 表示的数为 } -8+t, Q \text{ 表示的数为 } 1+3t,$$

$$\therefore PQ = 1+3t - (-8+t) = 2t+9, B'A = -2+2t - (-5) = 2t+3,$$

$$\therefore 2PQ + k \cdot B'A = 2(2t+9) + k(2t+3) = (2k+4)t + 18 + 3k,$$

若 $2PQ + k \cdot B'A$ 的值与它们的运动时间 t 无关, 则 $2k+4=0$,

$$\text{解得 } k=-2,$$

$$\text{此时 } 2PQ + k \cdot B'A = 18 + 3 \times (-2) = 12,$$

∴ 存在常数 k 使得 $2PQ + k \cdot B'A$ 的值与它们的运动时间无关, $k = -2$, 这个定值是 12.

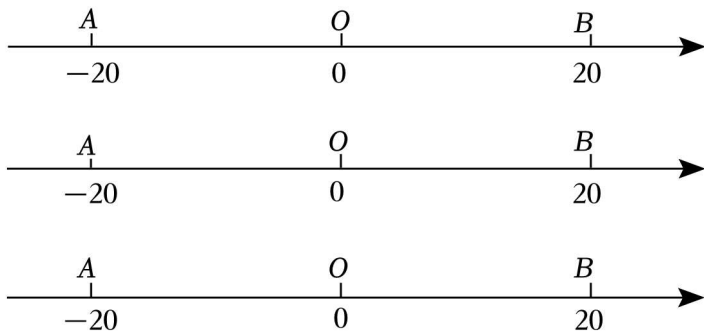
47. 数轴是一个强有力的数学工具, 它使数和数轴上的点建立起对应关系, 揭示了数与点之间的内在联系, 它是“数形结合”的重要体现.

如图, 在数轴上, 点 O 表示原点, 点 A 表示的数为 -20 , 点 B 表示的数为 20 . 动点 P 从点 A 出发, 以 2 个单位/秒的速度沿着数轴向右运动, 当点 P 运动到原点 O 时, 立即以原速向点 A 返回; 在点 P 出发的同时, 点 Q 从点 B 出发, 以 1 个单位/秒的速度沿着数轴向左运动, 当点 Q 运动到原点 O 时, 两点同时停止运动. 设运动的时间为 t 秒.

(1) 当 $t = 5$ 时, 点 Q 到达的点所表示的数比点 P 到达的点所表示的数大 25 个单位.

(2) 在点 P 向点 A 返回的过程中, 记点 P 与原点 O 在数轴上相距的长度为 d_1 个单位, 点 Q 与原点在数轴上相距的长度为 d_2 个单位. 无论 t 取何值, 若 $d_1 + kd_2$ (其中 k 为常数) 始终为定值, 求 k 的值及这个定值.

(3) 在 P 、 Q 两点从各自起点出发的同时, 点 R 从原点出发, 以 1 个单位/秒的速度沿着数轴向终点 B 运动. 整个运动过程中, 记点 P 、 R 在数轴上相距的长度为 d_3 个单位, 点 Q 、 R 在数轴上相距的长度为 d_4 个单位. 若 $d_3 = 3d_4$, 求 t 的值.



【解答】解: (1) 由题意得, $0 < t \leq 10$, 点 P 所表示的数为 $-20 + 2t$, 点 Q 所表示的数为 $20 - t$, $10 < t < 20$, 点 P 所表示的数为 $-2t$, 点 Q 所表示的数为 $20 - t$,

$t = 5$ 时, 点 P 所表示的数为 -10 , 点 Q 所表示的数为 15 ,

$15 - (-10) = 25$,

故答案为: 25;

(2) 由题意得, $10 < t < 20$ 时, $d_1 = 2(t - 10) = 2t - 20$, $d_2 = 20 - t$,

∴ 无论 t 取何值, 若 $d_1 + kd_2$ (其中 k 为常数) 始终为定值, $d_1 + kd_2 = 2t - 20 + 20k - kt = (2 - k)t + 20(k - 1)$,

∴ k 的值取 2 , $d_1 + kd_2 = 20$;

(3) 由题意得, $0 < t \leq 10$, 点 P 所表示的数为 $-20 + 2t$, 点 Q 所表示的数为 $20 - t$, 点 R 所表示的数为 t ,

$10 < t < 20$, 点 P 所表示的数为 $-2(t - 10)$, 点 Q 所表示的数为 $20 - t$, 点 R 所表示的数为 t ,

① $0 < t \leq 10$ 时, $d_3 = 20 - t$, $d_4 = 20 - 2t$,

∴ $d_3 = 3d_4$,

∴ $20 - t = 3(20 - 2t)$,

解得: $t = 8$,

② $10 < t < 20$ 时, $d_3 = 3t - 20$, $d_4 = 2t - 20$,

∴ $d_3 = 3d_4$,

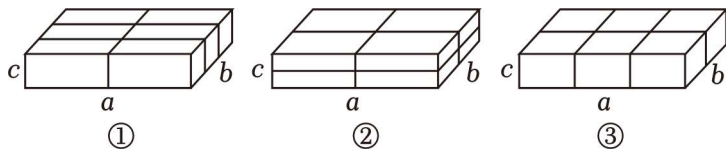
∴ $3t - 20 = 3(2t - 20)$,

解得: $t = \frac{40}{3}$,

综上所述, t 的值为 8 或 $\frac{40}{3}$.

二十、认识立体图形

48. 小颖为妈妈准备了一份生日礼物, 礼物外包装盒为长方体形状, 长、宽、高分别为 a 、 b 、 c ($a > b > c$), 小颖决定在包装盒外用丝带打包装饰, 她发现, 可以用如图所示的三种打包方式, 所需丝带的长度分别为 l_1 , l_2 , l_3 (不计打结处丝带长度).



(1) 用含 a 、 b 、 c 的代数式分别表示 l_1 , l_2 , l_3 ;

(2) 请帮小颖选出最节省丝带的打包方式, 并说明理由.

【解答】解: (1) \because 图①中与 a 平行的丝带由 4 根, 与 b 平行的丝带由 2 根, 与 c 平行的丝带由 6 根,

$$\therefore l_1 = 4a + 2b + 6c;$$

\because 图②中与 a 平行的丝带由 4 根, 与 b 平行的丝带由 4 根, 与 c 平行的丝带由 4 根,

$$\therefore l_2 = 4a + 4b + 4c;$$

\because 图③中与 a 平行的丝带由 2 根, 与 b 平行的丝带由 4 根, 与 c 平行的丝带由 6 根,

$$\therefore l_3 = 2a + 4b + 6c;$$

(2) 最节省的丝带的打包方式是图③中的打包方式, 理由如下:

方法一: $\because a > b > c$,

$$\therefore l_2 - l_1 = (4a + 4b + 4c) - (4a + 2b + 6c) = 2b - 2c > 0,$$

$$\therefore l_2 > l_1,$$

$$\text{又} \because l_1 - l_3 = (4a + 2b + 6c) - (2a + 4b + 6c) = 2a - 2b > 0,$$

$$\therefore l_1 > l_3,$$

$$\therefore l_2 > l_1 > l_3,$$

\therefore 最节省的丝带的打包方式是图③中的打包方式.

方法二 (特殊值法): $\because a > b > c$,

不妨假设 $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$,

$$\therefore l_1 = 4a + 2b + 6c = 4 \times 3 + 2 \times 2 + 6 \times 1 = 22,$$

$$l_2 = 4a + 4b + 4c = 4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 24,$$

$$l_3 = 2a + 4b + 6c = 2 \times 3 + 4 \times 2 + 6 \times 1 = 20,$$

$$\therefore 24 > 22 > 20,$$

$$\therefore l_2 > l_1 > l_3,$$

\therefore 最节省的丝带的打包方式是图③中的打包方式.

二十一、点、线、面、体

49. 如图, 长方形的相邻两边的长分别为 x 、 y , 将它分别绕相邻两边旋转一周.

(1) 两次旋转所形成的几何体都是 圆柱;

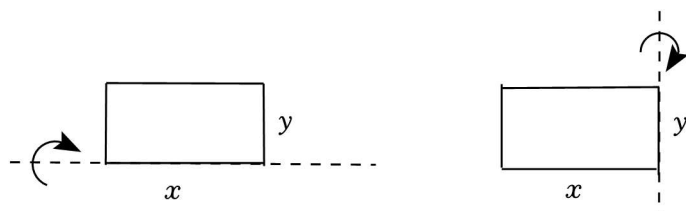
(2) 若 $x + y = a$ (a 是常数), 分别记绕长度为 x 、 y 的边旋转一周的几何体的体积为 V_x , V_y , 其中 x 、 V_x 、 V_y 的部分取值如表所示:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V_x		m							
V_y				96π		n			

①通过表格中的数据计算: $a = \underline{\quad\quad\quad}$, $m = \underline{\quad\quad\quad}$, $n = \underline{\quad\quad\quad}$;

②当 x 逐渐增大时, V_y 的变化情况: ;

③当 x 变化时, 请直接写出 V_x 与 V_y 的大小关系.



【解答】解: (1) 根据圆柱的定义可知, 旋转所得的几何体是圆柱.

故答案为：圆柱；

(2) 圆柱的体积 = 底面积 × 高，

① 当 $x=4$ 时， $V_y = \pi x^2 y = 96\pi$ ，解得 $y=6$ ，此时 $x+y=10$ ，所以 $a=10$ ；

当 $x=2$ 时， $y=10-2=8$ ， $V_x = \pi y^2 x = \pi \times 8 \times 8 \times 2 = 128\pi = m$ ；

当 $x=6$ 时， $y=10-6=4$ ， $V_y = \pi x^2 y = \pi \times 6 \times 6 \times 4 = 144\pi = n$ ；

故答案为：10，128 π ，144 π ；

② $V = \pi x^2 y = \pi x^2 (10-x)$ ，

当 x 逐渐增大时， V 的变化为：先增大，后减小。

故答案为：先增大，后减小；

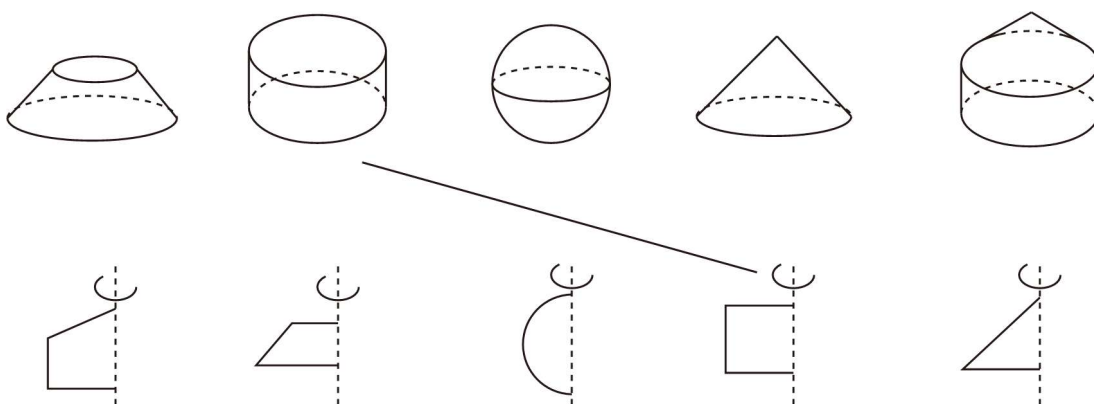
③ $V_y = \pi x^2 y = \pi x^2 (10-x)$ ， $V_x = \pi y^2 x = \pi (10-x)^2 x$ ，

改为：当 $V_y \geq V_x$ 时， $x^2(10-x) \geq \pi(10-x)^2 x$ ，

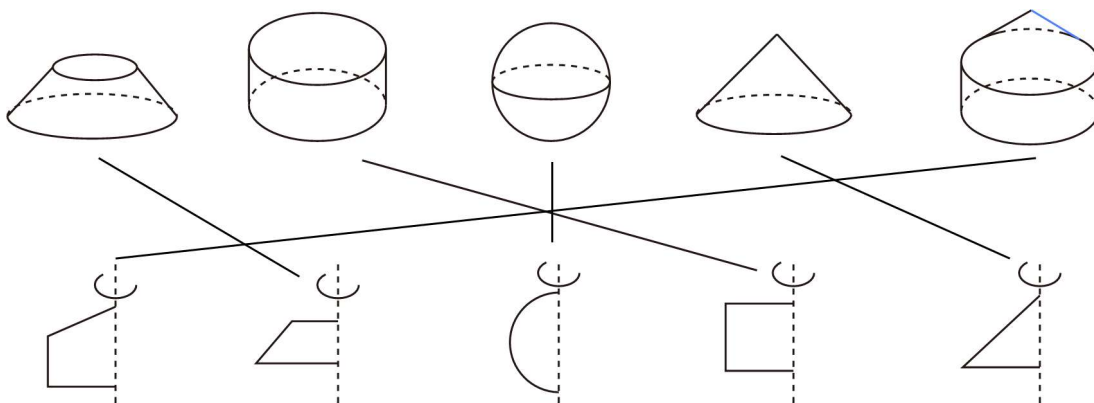
解得 $10 > x \geq 5$ ，

综上所述， $10 > x \geq 5$ 时， $V_y \geq V_x$ ； $0 < x < 5$ 时， $V_y < V_x$ 。

50. 如图，第二行的图形绕虚线旋转一周，便能形成第一行的某个几何体，用线连一连。



【解答】解：如图所示：

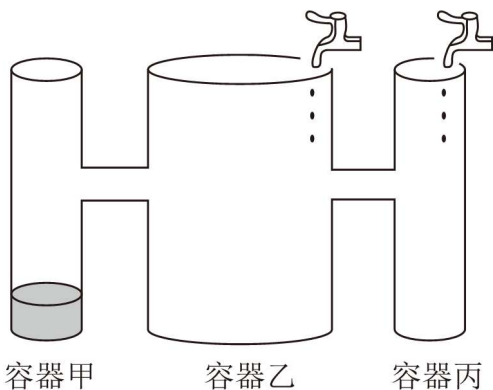


二十二、几何体的表面积

51. 如图，水平桌面上有甲、乙、丙三个圆柱形容器，并在距离容器底部 30cm 处用两根相同的管子连接，其中甲、丙两容器的底面积均为 80cm^2 ，乙容器的底面积为 320cm^2 ，甲容器中有水 480cm^3 。现同时向乙、丙两个容器内匀速注水，直至每个容器都注满水时停止注水，已知每个容器每分钟注水 1600cm^3 。

(1) 当甲、乙两个容器中水位的高度第一次相等时，求注水的时间；

(2) 当甲、乙两个容器中水位的高度相差 3cm 时，求注水的时间。



【解答】解：(1) $480 \div 80 = 6(\text{cm})$,

$6 \times 320 \div 1600 = 1.2(\text{分钟})$,

答：注水时间为 1.2 分钟；

(2) ①当水还未达到管子连接处时，

\therefore 甲、乙两个容器中水位的高度相差 3cm，甲水位高度为 6cm，

\therefore 乙容器可能得水位为 3cm 或 9cm，

$3 \times 320 \div 1600 = 0.6(\text{分钟})$,

$30 \times 80 \div 1600 = 1.5(\text{分钟})$,

$5 \times 1600 \div 320 = 7.5(\text{cm})$,

$(9 - 7.5) \times 320 \div (1600 \times 2) = 0.15(\text{分钟})$,

$5 + 0.15 = 1.65(\text{分钟})$,

②当乙水位达到了管子连接处后，

\therefore 甲、乙两个容器中水位的高度相差 3cm，

\therefore 甲容器此时的水位是 27cm，

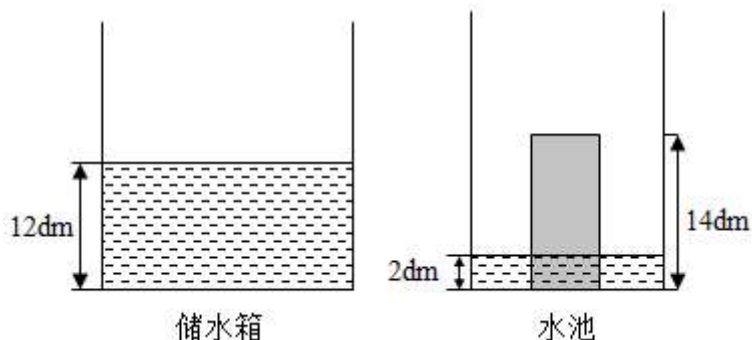
$(30 - 7.5) \times 320 \div (1600 \times 2) = 2.25(\text{分钟})$,

$(27 - 6) \times 80 \div (1600 \times 2) = 0.525(\text{分钟})$,

$5 + 2.25 + 0.525 = 4.275(\text{分钟})$,

答：注水时间为 0.6 分钟、1.65 分钟或 4.275 分钟。

52. 如图是一个长方体储水箱和一个长方体水池的侧面示意图(厚度忽略不计), 储水箱中水深 12dm , 把一高度为 14dm 的长方体石柱放置于水池中央后水池中水深 2dm . 现将储水箱中的水匀速注入水池. 注水 4min 时水池水面与石柱上底面持平; 继续注水 2min 后, 储水箱中的水全部注入水池, 此时水池中水深 19dm . 根据上述信息, 解答下列问题:



(1) 注水多长时间时, 储水箱和水池中的水的深度相同?

(2) 若水池底面积为 42dm^2 , 求石柱的底面积;

(3) 若石柱的体积为 168dm^3 , 请直接写出注水前储水箱中水的体积.

【解答】(1) 储水箱出水速度: $12 \div 6 = 2(\text{dm}/\text{min})$, 水池注水速度: $(14 - 2) \div 4 = 3(\text{dm}/\text{min})$,

设 $t\text{min}$ 时深度相同, 则:

$12 - 2t = 2 + 3t$,

解得： $t=2$ ，

答：注水 2min 时，储水箱和水池中的水的深度相同.

(2) 设石柱底面积 $S = a dm^2$ ，

则： $(14-2) \times (42-a) = 2 \times (19-14) \times 42$ ，

解得： $a=7$ ，

故石柱的底面积为 $7 dm^2$.

(3) \because 石柱的体积为 $168 dm^3$ ，

\therefore 石柱的底面积为： $168 \div 14 = 12 (dm^2)$ ，

依题意，得：

$(19-14) \cdot S_{\text{水池}} \div (6-4) = (14-2) \cdot (S_{\text{水池}} - 12) \div 4$ ，

解得： $S_{\text{水池}} = 72 (dm^2)$ ，

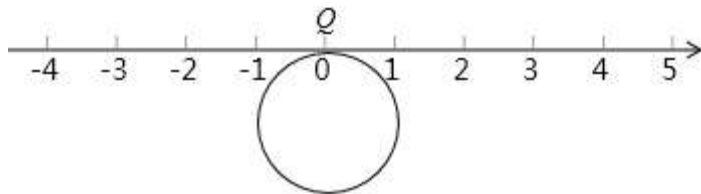
$12 \div 6 \times 4 \times S_{\text{储水箱}} = (72-12) \times (14-2)$ ，

解得： $S_{\text{储水箱}} = 90 (dm^2)$ ，

\therefore 注水前储水箱中水的体积 $V = S_{\text{储水箱}} \cdot h = 90 \times 12 = 1080 (dm^3)$.

二十三、认识平面图形

53. 如图，半径为 1 个单位长度的圆片上有一点 Q 与数轴上的原点重合 (提示：圆的周长 $C = 2\pi r$ ， π 取 3.14)



(1) 把圆片沿数轴向左滚动 1 周，点 Q 到达数轴上点 A 的位置，点 A 表示的数是 - 6.28 ；

(2) 圆片在数轴上向右滚动的周数记为正数，圆片在数轴上向左滚动的周数记为负数，依次运动情况记录如下：2，-1，-5，4，3，-2.

① 第几次滚动后， Q 点距离原点最近？第几次滚动后， Q 点距离原点最远？

② 当圆片结束运动时，圆心运动的路程共有多少？此时点 Q 所表示的数是多少？

【解答】解：(1) $\because 2\pi r = 2 \times 3.14 \times 1 = 6.28$ ，

\therefore 点 A 表示的数是 -6.28，

故答案为：-6.28；

(2) ① $\because +2 - 1 - 5 + 4 = 0$ ，

\therefore 第 4 次滚动后， Q 点距离原点最近；

$\because (+2) + (-1) + (-5) = -4$ ，

\therefore 第 3 次滚动后， Q 点距离原点最远；

② $\because |+2| + |-1| + |-5| + |+4| + |+3| + |-2| = 17$ ，

$\therefore 17 \times 2\pi \times 1 = 106.76$ ，

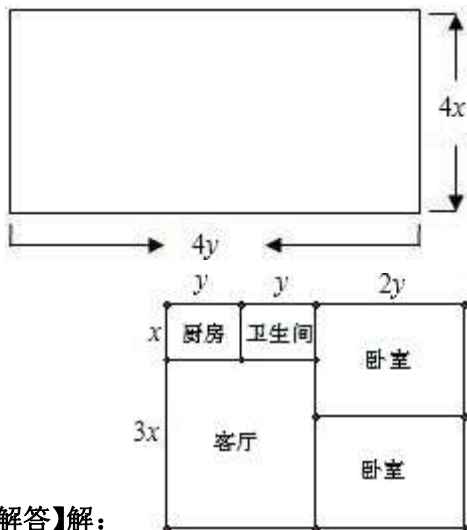
\therefore 当圆片结束运动时， Q 点运动的路程共有 106.76，

$\because 2 - 1 - 5 + 4 + 3 - 2 = 1$ ，

$\therefore 1 \times 2\pi \times 1 \approx 6.28$ ，

\therefore 此时点 Q 所表示的数是 6.28.

54. 人人争当小小设计师. 一个工程队为建设一项重点工程，要在一块长方形荒地上建造几套简易住房，每一套简易住房的平面是由长 $4y$ 、宽 $4x$ 构成，要求建成：两室、一厅、一厨、一卫. 其中客厅面积为 $6xy$ ；两个卧室的面积和为 $8xy$ ；厨房面积为 xy ；卫生间面积为 xy . 请你根据所学知识，在所给图中设计其中一套住房的平面结构示意图.

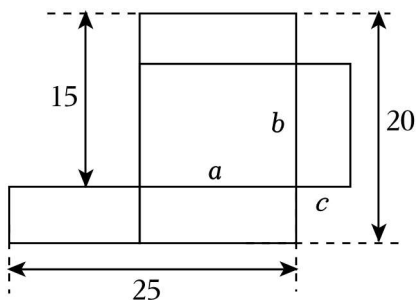


【解答】解：

二十四、几何体的展开图

55. 一个无盖的长方体包装盒展开后如图所示(单位: cm), a, b, c 分别是长方体的长宽高.

- (1) 求长方体的高 c ;
- (2) 求长方体的容积.



【解答】解: (1) $c = 20 - 15 = 5(\text{cm})$,

答: 长方体的高 c 的值为 5cm ;

(2) $b = 20 - 5 - 5 = 10(\text{cm})$,

$a = 25 - 10 = 15(\text{cm})$,

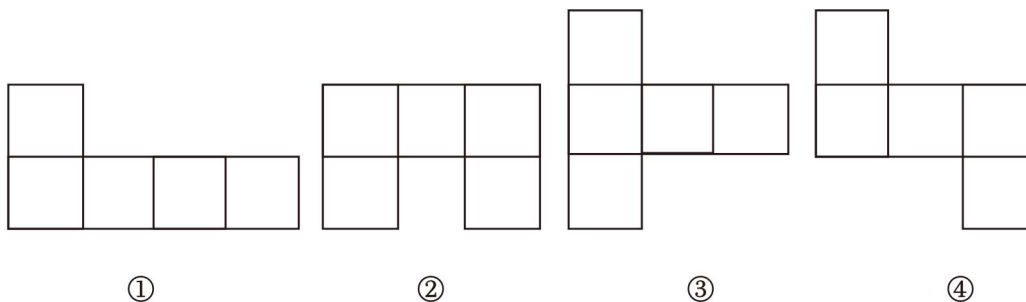
$V_{\text{长方体}} = 15 \times 10 \times 5 = 750(\text{cm}^3)$.

答: 长方体的容积为 750cm^3 .

二十五、展开图折叠成几何体

56. 【问题情境】《制作无盖的长方体纸盒》是苏科版七上的课题学习, 某综合实践小组在学习了这一课后, 开展了“长方体纸盒的制作”实践活动.

【问题解决】(1) 如图所示图形中, 是无盖正方体的表面展开图的是 ①③④; (填序号)



- (2) 综合实践小组利用边长为 $a(\text{cm})$ 的正方形纸板制作出两种不同方案的长方体盒子(图1为无盖的长方体纸盒, 图2为有盖的长方体纸盒).

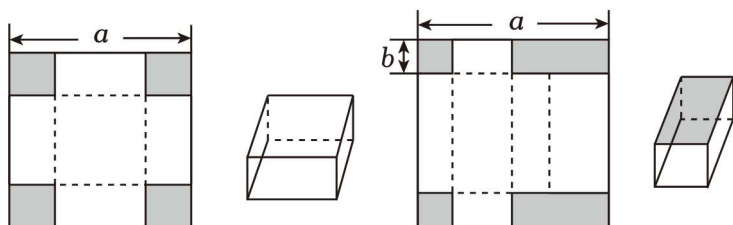


图 1

图 2

①图 1 方式制作一个无盖的长方体盒子的方法：先在纸板四角剪去四个同样大小边长为 $b(\text{cm})$ 的小正方形，再沿虚线折合起来。则长方体纸盒的底面周长为 _____ cm ；

②图 2 方式制作一个有盖的长方体纸盒的方法：先在纸板四角剪去两个同样大小边长为 $b(\text{cm})$ 的小正方形和两个同样大小的小长方形，再沿虚线折合起来。如果 $a = 30\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$ 。则该长方体纸盒的体积为 _____ cm^3 ；

【问题进阶】

(3) 若一个无盖长方体的长、宽、高分别为 6、4、3，它缺一个长为 6，宽为 4 的长方形底面，将它的表面沿某些棱剪开，展开成一个平面图形，则该长方体表面展开图的最大外围周长为 _____；通过比较长方体表面展开图取得最大外围周长和最小外围周长的两个图形，你发现了什么规律？你发现的规律是 _____。

【解答】解：(1) 根据正方体的表面展开图的特征可知，①③④可以折成无盖的正方体，

故答案为：①③④；

(2) ①图 1 所折成的盒子的底面是边长为 $(a - 2b)\text{cm}$ 的正方形，因此长方体纸盒的底面周长 $4 \times (a - 2b) = (4a - 8b)\text{cm}$ ，

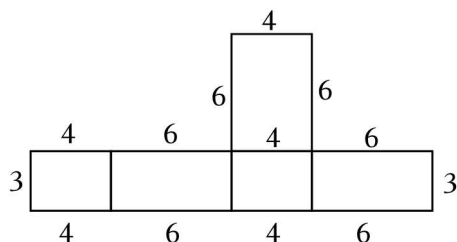
故答案为： $(4a - 8b)$ ；

②由题意可知，所作出的长方体的长为 $a - 2b = 20\text{cm}$ ，宽为 $\frac{a - 2b}{2} = 10\text{cm}$ ，高为 5cm ，

所以体积为 $20 \times 10 \times 5 = 1000(\text{cm}^3)$ ，

故答案为：1000；

(3) 要使长方体表面展开图的外围周长最大，则剪开的棱越长越好，即没有剪开的棱越短越好，如图所示，其展开图的周长最大，



所以最大周长为 58cm。

故答案为：58，没有剪开的棱越短越多，展开图的周长越大。

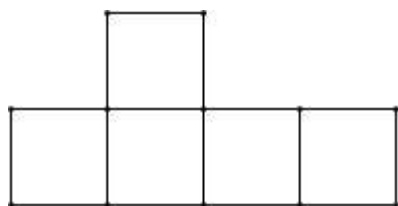
二十六、专题：正方体相对两个面上的文字

57. 李明同学设计了某个产品的正方体包装盒如图所示，由于粗心少设计了其中一个顶盖，请你把它补上，使其成为一个两面均有盖的正方体盒子。

(1) 共有 _____ 4 _____ 种弥补方法；

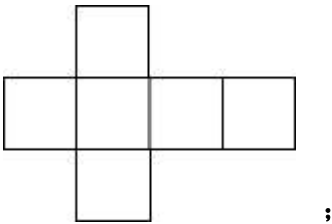
(2) 任意画出一成功的设计图 (在图中补充)；

(3) 在你帮忙设计成功的图中，把 $-6, 8, 10, -10, -8, 6$ 这些数字分别填入六个小正方形，使得折成的正方体相对面上的两个数相加得 0。（直接在图中填上）

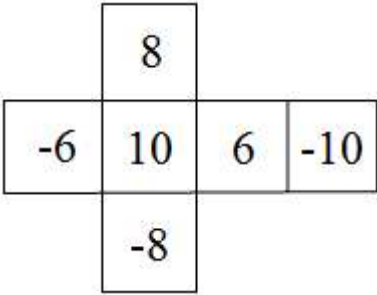


【解答】解：(1) 根据正方体展开图特点：中间 4 联方，上下各一个，中间 3 联方，上下各 1，2，两个靠一起，不能出“田”字，符合第一种情况，中间四个连在一起，上面一个，下面有四个位置，所以共有 4 种弥补方法，故答案为：4；

(2) 如图所示：



(3) 如图所示：



58. 如图 1，边长为 a cm 的正方形硬纸板的 4 个角上剪去相同的小正方形，这样可制作一个无盖的长方体纸盒，设底面边长为 x cm.

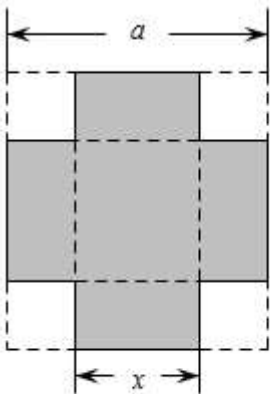


图1

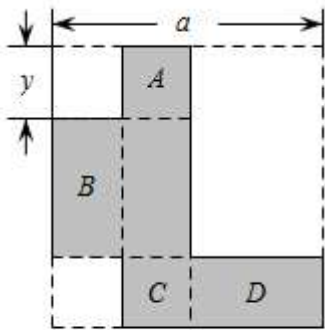


图2

(1) 这个纸盒的底面积是 $\rule{1cm}{0.4pt} x^2 \rule{1cm}{0.4pt} \text{cm}^2$ ，高是 $\rule{1cm}{0.4pt} \text{cm}$ (用含 a 、 x 的代数式表示).

(2) x 的部分取值及相应的纸盒容积如表所示：

x/cm	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纸盒容积 $/\text{cm}^3$		m				72			n

①请通过表格中的数据计算： $m = \rule{1cm}{0.4pt}$ ， $n = \rule{1cm}{0.4pt}$ ；

②猜想：当 x 逐渐增大时，纸盒容积的变化情况： $\rule{1cm}{0.4pt}$.

(3) 若将正方形硬纸板按图 2 方式裁剪，亦可制作一个无盖的长方体纸盒.

①若为该纸盒制作一个长方形盖子，则该长方形的两边长分别是 $\rule{1cm}{0.4pt} \text{cm}$ ， $\rule{1cm}{0.4pt} \text{cm}$ (用含 a 、 y 的代数式表示)；

②已知 A ， B ， C ， D 四个面上分别标有整式 $2(m + 2)$ ， m ， -3 ， 6 ，且该纸盒的相对两个面上的整式的和相等，求 m 的值.

【解答】解：(1) 这个纸盒的底面积是 $x^2\text{cm}^2$ ，高是 $\frac{a-x}{2}\text{cm}$ ，

故答案为: $x^2, \frac{a-x}{2}$;

(2) ①由题意得:

当 $x=6$ 时, 纸盒的容积为 72cm^3 ,

$$\therefore x^2 \cdot \frac{a-x}{2} = 72,$$

$$\therefore 36 \cdot \frac{a-6}{2} = 72,$$

$$\therefore a = 10,$$

$$\therefore \text{当 } x=2 \text{ 时, } m = 4 \times \frac{10-2}{2} = 16,$$

$$\text{当 } x=9 \text{ 时, } n = 81 \times \frac{10-9}{2} = \frac{81}{2},$$

故答案为: $16, \frac{81}{2}$;

$$\text{②当 } x=1 \text{ 时, 纸盒容积} = 1 \times \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, 纸盒容积} = 4 \times \frac{10-2}{2} = 16,$$

$$\text{当 } x=3 \text{ 时, 纸盒容积} = 9 \times \frac{10-3}{2} = \frac{63}{2},$$

$$\text{当 } x=4 \text{ 时, 纸盒容积} = 16 \times \frac{10-4}{2} = 48,$$

$$\text{当 } x=5 \text{ 时, 纸盒容积} = 25 \times \frac{10-5}{2} = \frac{125}{2},$$

$$\text{当 } x=6 \text{ 时, 纸盒容积} = 36 \times \frac{10-6}{2} = 72,$$

$$\text{当 } x=7 \text{ 时, 纸盒容积} = 49 \times \frac{10-7}{2} = \frac{147}{2},$$

$$\text{当 } x=8 \text{ 时, 纸盒容积} = 64 \times \frac{10-8}{2} = 64,$$

$$\text{当 } x=9 \text{ 时, 纸盒容积} = 81 \times \frac{10-9}{2} = \frac{81}{2},$$

猜想: 当 x 逐渐增大时, 纸盒容积的变化情况: 先随着 x 的增大而增大, 后随着 x 的增大而减小,

故答案为: 先随着 x 的增大而增大, 后随着 x 的增大而减小;

(3) ①若为该纸盒制作一个长方形盖子, 则该长方形的两边长分别是 $y \text{ cm}$, $(a-2y)\text{cm}$,

故答案为: $y, a-2y$,

②由图可知: A 与 C 相对, B 与 D 相对,

由题意得:

$$2(m+2) + (-3) = m+6,$$

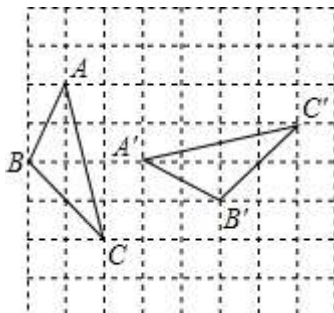
$$2m+4-3 = m+6,$$

$$m=5,$$

$\therefore m$ 的值为 5.

二十七、几何变换的类型

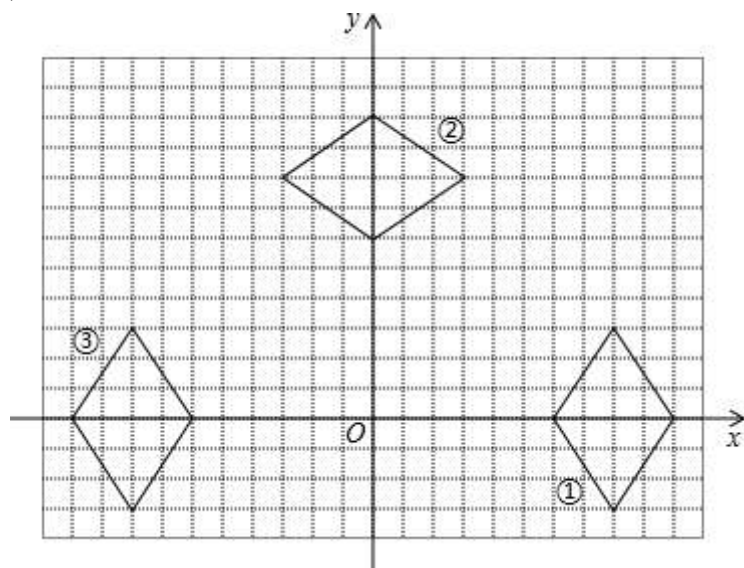
59. 如图, 试说明 $\triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 通过怎样的图形变换或变换组合 (平移、旋转、轴对称) 得到的?



【解答】解: 通过旋转、平移得到. 以 B 为中心, 逆时针旋转 90° , 向下平移 1 个单位, 再向右平移 5 个单位.

60. 如图,有三个菱形位于同一个平面直角坐标系中,解答下列问题:

- (1) 这三个菱形的对称中心坐标分别为:① (8,0) 、② 、③ ,而面积都等于 .
- (2) 菱形②可以看作是由菱形①如何旋转得到的? 答: .
- (3) 菱形③与菱形②可看作是 关于直线 l 对称的,则直线 l 所对应的函数关系式是 .
- (4) 从菱形①变换到菱形③,可以满足什么几何变换? 请你设计两种不同的变换方法.



【解答】解: (1) 根据对称中心的概念可知① (8,0) ② (0,8) ③ (-8,0), $S=12$,

故答案为① (8,0) ② (0,8) ③ (-8,0), $S=12$,

(2) 根据旋转的特点可知:以坐标原点 O 为旋转中心,按逆时针方向旋转 90° ,

故答案为以坐标原点 O 为旋转中心,按逆时针方向旋转 90° ,

(3) 根据题意得解析式为 $y=-x$,

(4) 平移变换:菱形①沿 x 轴反方向 (或从右往左) 平移 16 各单位得到菱形③,旋转变换:菱形①以原点为旋转中心顺时针 (或逆时针) 旋转 180° 得到菱形③.