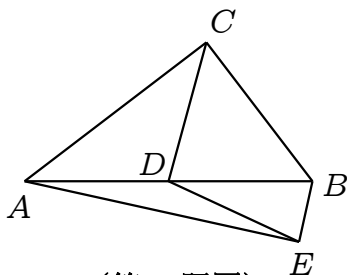


高数见林初二数学期中好题回看(二)

四、翻折综合

1. (2024-2025 期中·星海·16) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, 点 D 是 AB 的中点, 将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折得到 $\triangle ECD$, 连接 AE , BE , 则线段 BE 的长等于 _____.



(第16题图)

【解析】解: 如图, 延长 CD 交 AE 于点 H , 作 $CF \perp AB$, 垂足为 F .

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = 4$, $BC = 3$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5.$$

$\because D$ 为 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD = DC.$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CF,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times CF,$$

$$\text{解得 } CF = \frac{12}{5}.$$

由翻折的性质可知 $AC = CE$, $AD = DE$,

$$\therefore CH \perp AE, AH = HE.$$

$$\because DC = DB, \frac{1}{2} BD \cdot CF = \frac{1}{2} DC \cdot HE,$$

$$\therefore HE = CF = \frac{12}{5}.$$

$$\therefore AE = 2HE = \frac{24}{5}.$$

$$\because AD = DE = DB,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA, \angle DBE = \angle DEB,$$

$$\because \angle DAE + \angle DEA + \angle DBE + \angle DEB = 180^\circ,$$

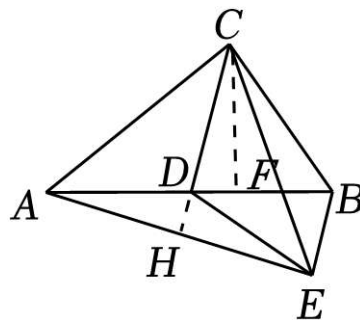
$$\therefore \angle AED + \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 为直角三角形.

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - EA^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}.$$

故答案为: $\frac{7}{5}$.



2. (2024-2025 期中·立达·26) 如图1, 在直角三角形纸片 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 6$, $AC = 8$. 点 M 是射线 AC 上的动点 (点 M 不与点 A 重合).

【数学活动】

将三角形纸片 ABC 进行以下操作: 第一步: 折叠三角形纸片 ABC 使点 C 与点 A 重合, 然后展开铺平, 得到折痕 DE ; 第二步: 将 $\triangle ABC$ 沿折痕 DE 展开, 连接 AD , 然后将 $\triangle ADE$ 沿直线 DM 翻折得到 $\triangle DFG$, 点 E , A 的对应点分别是点 F , G , 直线 GF 与边 AB 所在直线交于点 N .

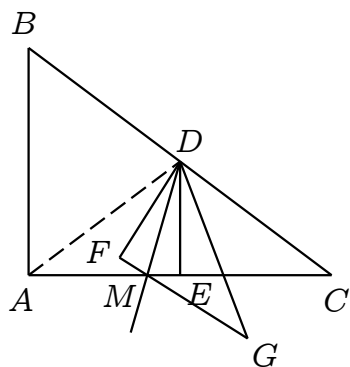


图1

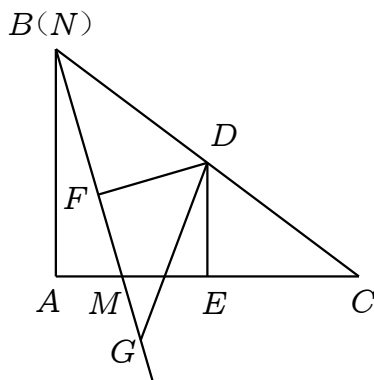


图2

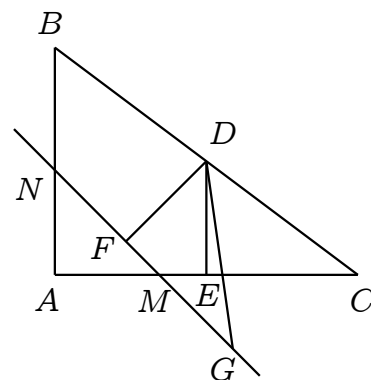


图3

【数学思考】

(1) 折痕 DE 的长为 _____;

(2) $\triangle ADE$ 沿直线 DM 翻折至图1的位置时, 试判断 MF 与 ME 的数量关系, 并证明你的结论:

【数学探究】

(3) $\triangle ADE$ 翻折至图2、图3所示位置时, 探究下列问题:

①如图2, 当直线 GF 经过点 B 时, 求 AM 的长;

②如图3, 当直线 $GF \parallel BC$ 时, AM 的长为 _____;

【问题延伸】

(4) 在点 M 的运动过程中, 连接 AF , 则 AF 的取值范围是 _____.

【解析】解: (1) 由折叠的性质得 $AE = EC$, $DE \perp AC$,

$$\therefore AE = EC = \frac{1}{2}AC = 4$$

$$\therefore DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

故答案为: 3.

(2) $MF = ME$, 证明如下:

如图1, 连接 DM ,

由旋转的性质得 $DE = DF$, $\angle DFM = \angle DEM = 90^\circ$,

$$\therefore Rt\triangle DMF \cong Rt\triangle DME (HL),$$

$$\therefore MF = ME;$$

(3) ①由旋转的性质得 $\angle DGB = \angle C$, $DG = DC$, $DB = DC$,

$$\therefore DG = DB,$$

$$\therefore \angle DGB = \angle DBG,$$

$$\therefore \angle MBC = \angle C,$$

$$\therefore BM = MC,$$

设 $BM = MC = x$,

在 $Rt\triangle ABM$ 中, $BM^2 = AB^2 + AM^2$,

$$\therefore 6^2 + (8 - x)^2 = x^2,$$

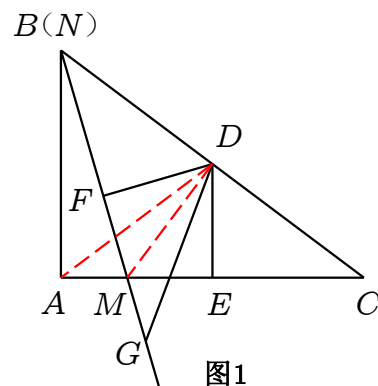


图1

$$\text{解得 } x = \frac{25}{7}.$$

$$\therefore AM = AC - CM = 8 - \frac{25}{7} = \frac{7}{4}.$$

②如图2, DG与AC交与点O,

$$\because GF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CDG = \angle DGF,$$

$$\therefore CO = DO, MO = GO$$

$$CM = OM + CO = DO + OG = DG = 5$$

$$\text{即 } AM = AC - CM = 3$$

故答案为: 3.

(4)如图3, 连接AD, AF,

$$\text{则 } AD - DF \leq AF \leq AD + DF,$$

当A、F、D三点共线, 且点F在线段AD上时, $AF + DF = AD$,

此时 $AF + DF$ 的值最小, AF 最小,

$$\because \angle BAC = 90^\circ, BD = CD.$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC = 5,$$

$$\therefore DF = DE = 3,$$

$$\therefore AF \text{ 的最小值} = AD - DF = 5 - 3 = 2,$$

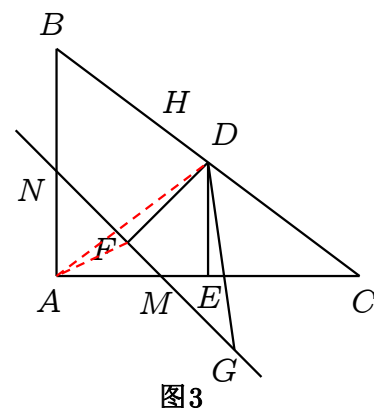
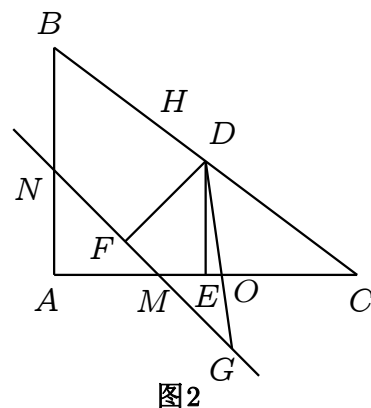
当A、F、D三点共线, 且点F在AD延长线上时,

$$AF = AD + DF, \text{ 此时, } AF \text{ 最大,}$$

$$\therefore AF = AD + DF = 5 + 3 = 8,$$

$$\therefore 2 \leq AF \leq 8.$$

故答案为: $2 \leq AF \leq 8$



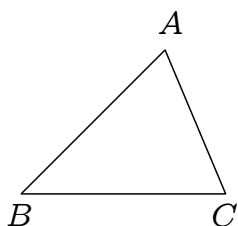
3. (2024 - 2025 期中·星湾·27)

【阅读教材】

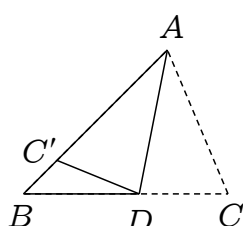
苏科版八年级上册第69页《折纸与证明》. 折纸, 常常能为证明一个命题提供思路和方法.

例如, 如图1(1), 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 怎样证明 $\angle C > \angle B$ 呢?

把AC沿 $\angle A$ 的平分线AD翻折, 因为 $AB > AC$, 所以点C落在AB上的点C'处(如图1(2)), 于是, 由 $\angle AC'D = \angle C$, $\angle AC'D > \angle B$, 可得 $\angle C > \angle B$.

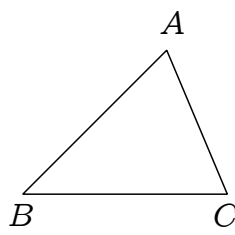


(1)

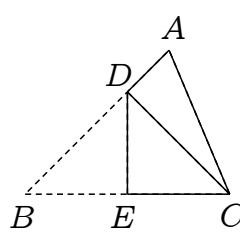


(2)

图1



(1)



(2)

图2

【类比探究】

如图2(1), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C > \angle B$, 能否证明 $AB > AC$ 呢? 小军同学提供了一种方法: 把 $\triangle ABC$ 翻折, 使点B落在点C上, 折痕分别交AB、BC于点D、E(如图2(2)), 再运用三角形三边关系即可证明, 请按照小军的方法完成证明.

【方法运用】

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 2\angle B$, 点D是BC边上一点, 连接AD.

(1) 如图3(1), 若AD平分 $\angle BAC$, 则AC、CD、AB之间的数量关系是 _____;

(2) 如图 3(2), 若 $AD \perp BC$, 写出 AC 、 CD 、 BD 之间的数量关系并说明理由.

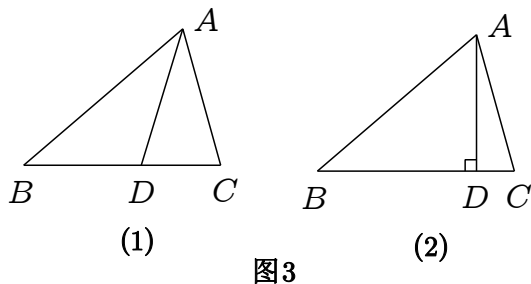


图3

【拓展提升】

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, 点 D 是 AB 边上一点, 连接 CD , 将 $\triangle ABC$ 沿 CD 所在的直线翻折, 点 A 的对应点是点 A' .

(1) 如图 4(1), 若 $CD \perp AB$, 则 $AA' =$ _____;

(2) 如图 4(2), 若点 D 是 AB 的中点, 连接 AA' 、 BA' , 则四边形 $AA'BC$ 的面积为 _____

【解析】解:【类比探究】

如图所示: $\because \triangle DEB$ 翻折后得到 $\triangle DEC$

$$\therefore DB = DC$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ADC \text{ 中, } AD + DC > AC$$

$$\therefore AD + DB > AC$$

$$\therefore AB > AC$$

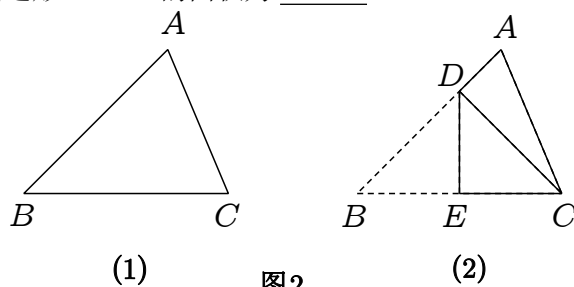


图2

【方法运用】

解: (1) 如图 3(1), 在 AB 上截取 $AH = AC$, 连接 DH ,

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DAB,$$

$$\text{又 } \because AD = AD, AC = AH,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADH (SAS),$$

$$\therefore \angle C = \angle AHD, HD = DC,$$

$$\therefore \angle C = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle AHD = 2\angle B = \angle B + \angle BDH,$$

$$\therefore \angle B = \angle BDH,$$

$$\therefore BH = HD,$$

$$\therefore BH = DC,$$

$$\therefore AB = BH + AH = CD + AC,$$

故答案为: $AB = CD + AC$;

(2) $BD = AC + CD$, 理由如下: 如图 3 (2), 在 BD 上截取 $DE = DC$, 连接 AE ,

$$\therefore DE = DC, \angle ADC = \angle ADE = 90^\circ, AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADE (SAS),$$

$$\therefore AE = AC, \angle ACE = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle C = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle AEC = 2\angle B = \angle B + \angle BAE,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAE,$$

$$\therefore BE = AE,$$

$$\therefore BE = AC,$$

$$\therefore BD = BE + DE = AC + CD$$

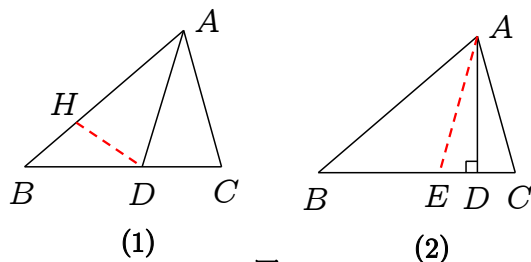


图3

【拓展提升】解: (1) 如图 4 (1),

$$\therefore \text{将 } \triangle ABC \text{ 沿 } CD \text{ 所在的直线翻折, } CD \perp AB,$$

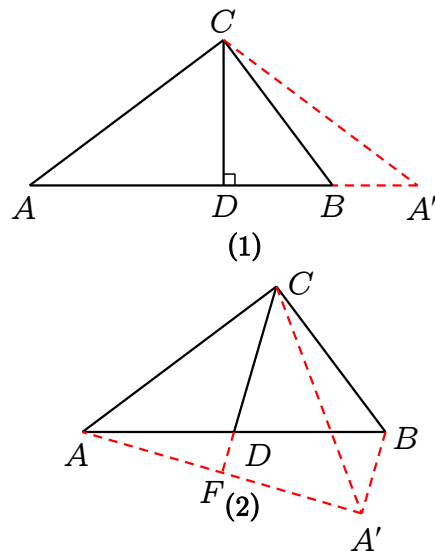
$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ADC = \angle A'DC = 90^\circ, AD = A'D, \\
&\therefore \angle ADC + \angle A'DC = 180^\circ, \\
&\therefore \text{点 } A, \text{点 } D, \text{点 } A' \text{ 三点共线}, \\
&\because \angle ACB = 90^\circ, BC = 3, AC = 4, \\
&\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 5, \\
&\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \cdot BC \\
&= \frac{1}{2} \times AB \cdot CD, \\
&\therefore DC = \frac{12}{5}, \\
&\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5}, \\
&\therefore AA' = 2 \times \frac{16}{5} = \frac{32}{5},
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{32}{5}$;

(2)如图 4(2),延长 CD 交 AA' 于 F ,

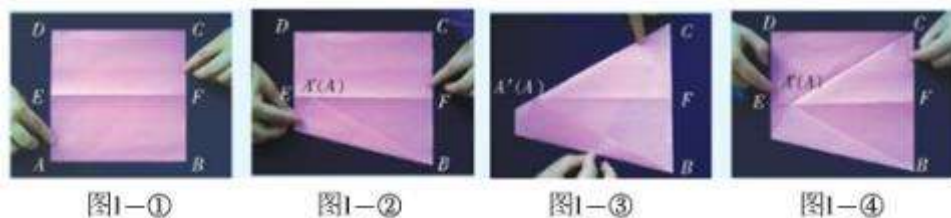
$$\begin{aligned}
&\because CD \text{ 平分 } AB, \\
&\therefore AD = DB = \frac{5}{2} = CD, \\
&\because \text{将 } \triangle ABC \text{ 沿 } CD \text{ 所在的直线翻折}, \\
&\therefore AC = A'C = 4, AD = A'D = \frac{5}{2}, \\
&\therefore CF \text{ 垂直平分 } AA', \\
&\therefore CF \perp AA', AF = A'F, \\
&\therefore A'C^2 = CF^2 + A'F^2, A'D^2 = DF^2 + A'F^2, \\
&\therefore 16 = (5 + DF)^2 + A'F^2, \frac{25}{4} = DF^2 + A'F^2, \\
&\therefore A'F = 2.4, \\
&\therefore AA' = 4.8, A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{5^2 - 4.8^2} = \frac{7}{5} \\
&S_{\text{四边形 } AA'BC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABA'} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{24}{5} = \frac{234}{25}
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{234}{25}$



4. (2024 - 2025 期中·平江、草桥·25)

操作体验: 数学活动《折纸与证明》中,有这样一段活动材料:



- ①如图 1-①,把正方形 $ABCD$ 对折后再展开,折痕为 EF ;
- ②如图 1-②,将点 A 翻折到 EF 上的点 A' 处,且使折痕过点 B ;
- ③如图 1-③,沿 $A'C$ 折叠,得 $\triangle A'BC$ (如图 1-④).

(1) 根据以上操作,结合图 2 试证明 $\triangle A'BC$ 是等边三角形;

初步探究:

(2) 将 AB 沿 BE 翻折到 BP 位置,延长 EP 交 CD 于点 Q ,如图 3,求证: 点 Q 是 CD 的三等分点.

深入探究:

(3) 如图 4,点 M 在 AB 上移动,将 BC 沿 CM 翻折到点 B' ,连接 CM 、 DB' 并延长交于点 H , N 是 DB' 的中点,

连接 CN , AH , 请直接写出 HA 、 HC 、 HD 之间的等量关系 _____.

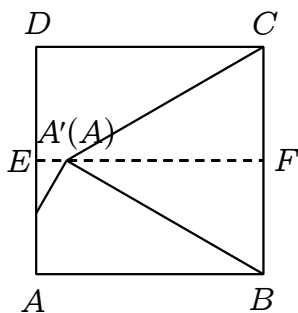


图2

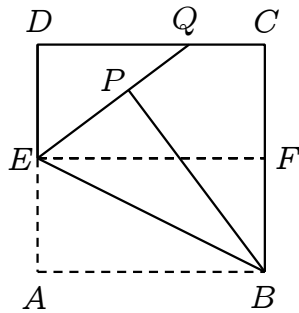


图3

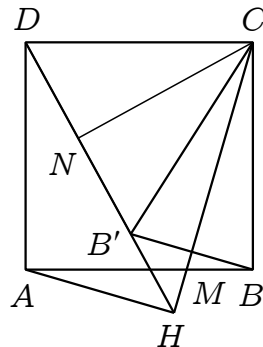


图4

【解析】解: (1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC,$$

\because 正方形纸片 $ABCD$ 对折后再展开, 折痕为 EF ,

$\therefore EF$ 垂直平分 BC ,

$$\therefore CA' = BA',$$

\because 将点 A 翻折到 EF 上的点 A' 处,

$$\therefore AB = A'B,$$

$$\therefore BA' = BC,$$

$$\therefore BA' = BC = CB',$$

$\therefore \triangle A'BC$ 是等边三角形;

(2) 证明: 连接 BQ , 由折叠知 $AB = BP = BC$, $\angle BAE = \angle BPE = \angle BPQ = 90^\circ$,

$$\because \angle C = 90^\circ, BQ = BQ,$$

$$\therefore Rt\triangle BPQ \cong Rt\triangle BCQ (HL),$$

$$\therefore CQ = PQ,$$

设 $AE = a$, 则 $DE = EP = a$, 设 $CQ = PQ = x$, 则 $QD = 2a - x$,

在 $Rt\triangle EDQ$ 中, $ED^2 + DQ^2 = EQ^2$,

$$\therefore a^2 + (2a - x)^2 = (a + x)^2,$$

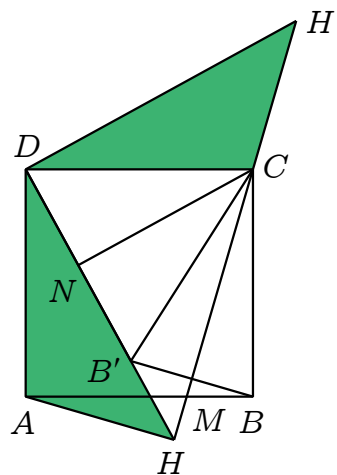
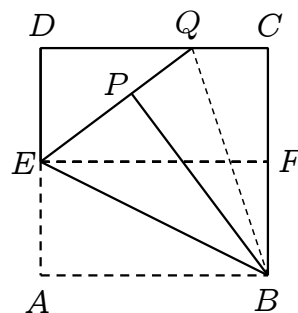
$$\therefore 2a = 3x,$$

$$\therefore x = \frac{2a}{3},$$

$$\therefore CQ = \frac{1}{3}CD,$$

即点 Q 是 CD 的三等分点.

(3) $HA + HC = \sqrt{2}HD$



五、等腰、直角三角形的存在性探究

5. (2024-2025 期中·振华·25) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 16\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, P 、 Q 是 $\triangle ABC$ 边上的两个动点, 其中点 P 从点 A 开始沿 $A \rightarrow B$ 方向运动, 且速度为每秒 1cm , 点 Q 从点 B 开始沿 $BC \rightarrow CA$ 方向运动, 且速度为每秒 2cm , P 、 Q 两点同时出发, 当点 P 运动到点 B 时两点停止运动, 设运动时间为 t 秒.

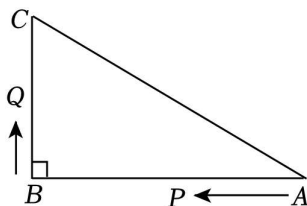
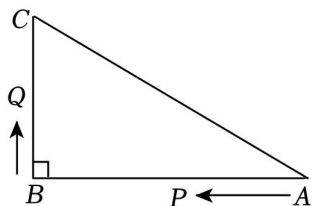
(1) $BP =$ _____ cm (用含 t 的代数式表示);

(2) 当点 Q 在边 BC 上运动时.

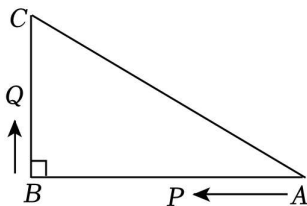
① 出发几秒后, $\triangle PQB$ 是等腰三角形?

② PQ 能否把 $\triangle ABC$ 的周长平分? 若能, 求出 t 的值; 若不能, 请说明理由.

(3) 当点 Q 在边 CA 上运动时, 若 $\triangle BCQ$ 是等腰三角形, 求满足条件的 t 的值.



(备用图)



(备用图)

【解析】解: (1) 根据题意可知: $AP = t \text{ cm}$, $BQ = 2t \text{ cm}$,

$$\because AB = 16\text{cm},$$

$$\therefore BP = AB - AP = (16 - t)\text{cm},$$

故答案为: $(16 - t)$;

(2) ① 当点 Q 在边 BC 上运动, $BQ = 2t \text{ cm}$, $BP = (16 - t)\text{cm}$,

当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时, 即 $BQ = BP$,

$$\therefore 2t = 16 - t,$$

$$\therefore t = \frac{16}{3},$$

\therefore 出发 $\frac{16}{3}$ 秒后, $\triangle PQB$ 是等腰三角形;

② 当 Q 在 BC 上, 则 $0 \leq t \leq 6$, 如图 1,

根据题意可知: $AP = t \text{ cm}$, $BQ = 2t \text{ cm}$,

$$\therefore BP = (16 - t)\text{cm}, CQ = (12 - 2t)\text{cm},$$

$\therefore PQ$ 把 $\triangle ABC$ 的周长平分,

$$\therefore 16 - t + 2t = t + 12 - 2t + 20,$$

$$\therefore t = 8 \text{ 舍去 (不符合 } t \text{ 取值范围)},$$

\therefore 点 Q 在边 BC 上运动时, PQ 不能把 $\triangle ABC$ 的周长平分;

(3) ① 当 $CQ = BQ$ 时, 如图 2.1,

则 $\angle C = \angle CBQ$,

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBQ + \angle ABQ = 90^\circ,$$

$$\because \angle A + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABQ,$$

$$\therefore BQ = AQ,$$

$$\therefore CQ = AQ = 10,$$

$$\therefore BC + CQ = 22,$$

$$\therefore t = 22 \div 2 = 11 \text{ 秒};$$

② 当 $CQ = BC$ 时, 如图 2.2 所示, 则 $BC + CQ = 24$,

$$\therefore t = 24 \div 2 = 12 \text{ 秒};$$

③ 当 $BC = BQ$ 时, 如图 2.3 所示,

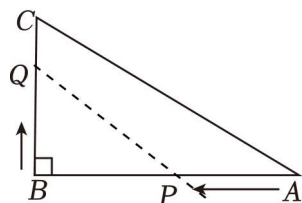


图1

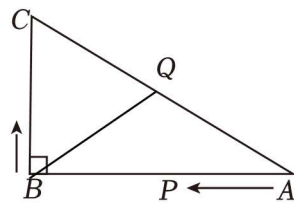


图2.1

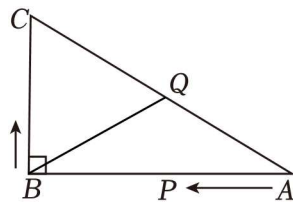


图2.2

$$\begin{aligned}
&\text{过 } B \text{ 点作 } BE \perp AC \text{ 于点 } E, \\
&\therefore BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12 \times 16}{20} = \frac{48}{5}, \\
&\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{48}{5}\right)^2} = \frac{36}{5}, \\
&\therefore CQ = 2CE = 14.4, \\
&\therefore BC + CQ = 26.4, \\
&\therefore t = 26.4 \div 2 = 13.2 \text{ 秒},
\end{aligned}$$

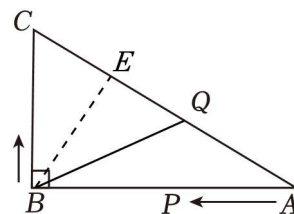


图2.3

综上所述:当 t 为 11 秒或 12 秒或 13.2 秒时, $\triangle BCQ$ 为等腰三角形.

6. (2024 - 2025 期中·吴昊相·27) 如图 (1), 在等腰直角三角形纸片 ABC 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{2} + 2$, 点 D, E 分别为边 AB, BC 上的动点.

(1) 将纸片沿 DE 翻折, 点 B 的对应点 B' 恰好落在边 AC 上, 且点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 线段 $BB' =$ _____.

(2) 如图 2, 将纸片沿 DE 翻折, 点 B 的对应点 B' 恰好落在边 AC 上, 再将纸片沿 $B'E$ 翻折, 点 C 的对应点为 C' , 如图 (3). 当 $\triangle DB'E, \triangle B'C'E$ 的重合部分 (即阴影部分) 为直角三角形时, 求 CE 的长.

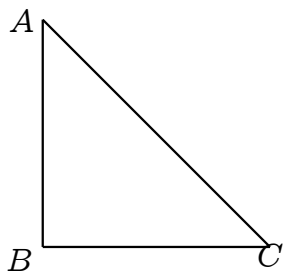


图1

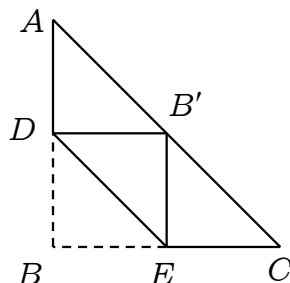


图2

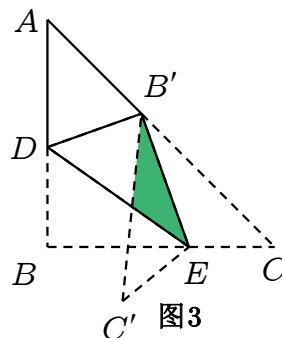


图3

【解析】解: (1) 由题意得: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4 + 2\sqrt{2}$, $BB' = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times (4 + 2\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$.

(2) 解: 由翻折可知: 要使 $\triangle DB'E, \triangle B'C'E$ 的重合部分为直角三角形, 则分两种情况画图:

①当 $DE \perp B'C'$ 时,

由翻折可知: $\angle EB'D = \angle DBE = 90^\circ$, $\angle B'ED = \angle BED$, $\angle CB'E = \angle C'B'E$,

$$\therefore \angle BEB' = \angle CB'E + \angle C,$$

$$\therefore 2\angle DEB' = \angle CB'E + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB' = 90^\circ - \angle EB'C',$$

$$\therefore 2(90^\circ - \angle EB'C') = \angle CB'E + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CB'E = \angle C'B'E,$$

$$\therefore \angle CB'E = \angle C'B'E = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CEB' = 90^\circ,$$

$$\therefore B'E \perp BC,$$

由翻折可知: $CB' = C'B'$,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} + 2) = \sqrt{2} + 1;$$

②当 $\angle EB'C' = 90^\circ$,

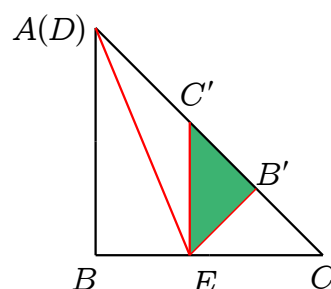
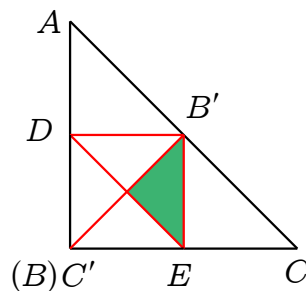
由翻折可知: $B'E = BE$, $\angle EB'A = \angle B = 90^\circ$,

\therefore 点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上,

设 $B'E = BE = x$, 则 $CE = BC - BE = 2\sqrt{2} + 2 - x$,

在 $Rt\triangle B'EC$ 中, $\angle C = \angle B'EC = 45^\circ$,

$$\therefore B'E = B'C = x,$$



$$\therefore CE = \sqrt{2}B'E,$$

$$\therefore 2\sqrt{2} + 2 - x = \sqrt{2}x, \text{ 解得 } x = 2,$$

$$CE = \sqrt{2}B'E = \sqrt{2}x = 2\sqrt{2}.$$

综上所述: CE 的长为 $\sqrt{2} + 1$ 或 $2\sqrt{2}$.

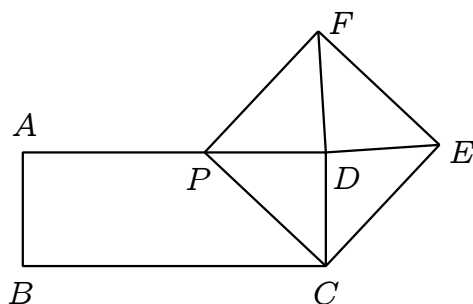
7. (2024-2025 期中·园区校·27)

如图①, 在矩形 $ABCD$ 中, 动点 P 从点 A 出发, 以 1cm/s 的速度沿 AD 向终点 D 移动, 设移动时间为 $t(\text{s})$. 连接 PC , 以 PC 为一边作正方形 $PCEF$, 连接 DE 、 DF . 设 $\triangle PCD$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$. y 与 t 之间的关系如图②所示.

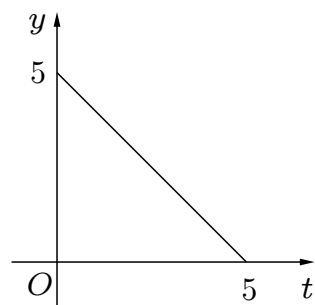
(1) $AB = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$, $AD = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$;

(2) 求当 $t = 1.5$ 时, $\triangle PDF$ 的面积.

(3) 当 t 为何值时, $\triangle DEF$ 为等腰三角形? 请简要说明理由.



图①



图②

【解析】解: (1) 由图②知: $AD = 5$,

当 $t = 0$ 时, P 与 A 重合, $y = \frac{1}{2} \times AD \times CD = 5$,

$$\frac{1}{2} \times 5 \times CD = 5,$$

$$CD = 2\text{cm},$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD = 2\text{cm},$$

故答案为: 2, 5;

(2) 由题意得: $AP = t$, $PD = 5 - t$,

$$\therefore y = \frac{1}{2} CD \cdot PD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (5 - t) = 5 - t,$$

\therefore 四边形 $EFPC$ 是正方形,

$$\therefore S_{\triangle DEF} + S_{\triangle PDC} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形} EFPC},$$

$$\therefore PC^2 = PD^2 + CD^2,$$

$$\therefore PC^2 = 2^2 + (5 - t)^2 = t^2 - 10t + 29,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} (t^2 - 10t + 29) - (5 - t) = \frac{1}{2} t^2 - 4t + \frac{19}{2} = \frac{1}{2} (t - 4)^2 + \frac{3}{2},$$

当 t 为 4 时, $\triangle DEF$ 的面积最小, 且最小值为 $\frac{3}{2}$;

(3) 当 $\triangle DEF$ 为等腰三角形时, 分四种情况:

① 当 $FD = FE$ 时, 如图所示, 过 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ,

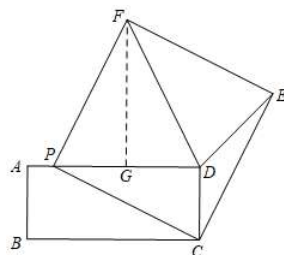
\therefore 四边形 $EFPC$ 是正方形,

$$\therefore PF = EF = PC, \angle FPC = 90^\circ,$$

$$\therefore PF = FD,$$

$$\therefore FG \perp PD,$$

$$\therefore PG = DG = \frac{1}{2} PD,$$



$$\begin{aligned}
&\because \angle FPG + \angle CPD = \angle CPD + \angle DCP = 90^\circ, \\
&\therefore \angle FPG = \angle DCP, \\
&\because \angle FGP = \angle PDC = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle FPG \cong \triangle PDC (AAS), \\
&\therefore PG = DC = 2, \\
&\therefore PD = 4, \\
&\therefore AP = 5 - 4 = 1,
\end{aligned}$$

即 $t = 1$;

②当 $DE = DF$ 时, 如图所示, E 在 AD 的延长线上, 此时正方形 $EFPC$ 是正方形, $PD = CD = 2$,

$$\therefore AP = t = 5 - 2 = 3;$$

③当 $DE = EF$ 时, 如图所示, 过 E 作 $EG \perp CD$ 于 G ,

$$\therefore FE = DE = EC,$$

$$\therefore CG = DG = \frac{1}{2}CD = 1,$$

同理得: $\triangle PDC \cong \triangle CGE (AAS)$,

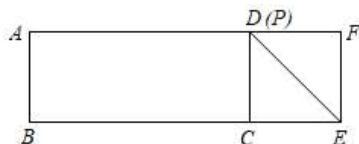
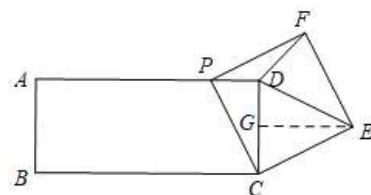
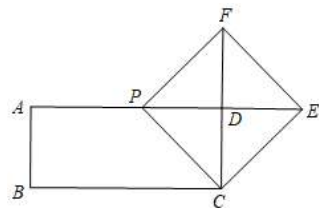
$$\therefore PD = CG = 1,$$

$$\therefore AP = t = 5 - 1 = 4,$$

④当 $DF = EF$ 时, 如图所示, $PC = EF = PF = 2$,

且 $PC \perp BC$, 此时 P 与 D 重合, $t = 5$,

综上, 当 $t = 1s$ 或 $3s$ 或 $4s$ 或 $5s$ 时, $\triangle DEF$ 为等腰三角形.



8. (2024 - 2025 期中·昆太常张·24)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 6$, $AC = 8$, 连接 DC .

(1) $AB =$ _____;

(2) 已知, 直线 MN 垂直平分 AC 分别交 AB , AC 于点 D , 点 E , 若点 F 从点 C 出发沿 CB 以每秒 2 个单位长度的速度向终点 B 匀速运动, 设运动时间为 t 秒. 连接 DC , DF , 在点 F 运动过程中, $\triangle DCF$ 能否为以 CF 为腰的等腰三角形? 若能, 求出 t 的值; 若不能, 请说明理由.

【解析】解: (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 6$, $AC = 8$,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

故答案为: 10;

(2) 在点 F 运动过程中, $\triangle DCF$ 能否为以 CF 为腰的等腰三角形.

由题意得 $CF = 2t$,

\because 直线 MN 垂直平分 AC ,

$$\therefore DA = DC,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle A,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ, \angle BCD + \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCD,$$

$$\therefore BD = DC,$$

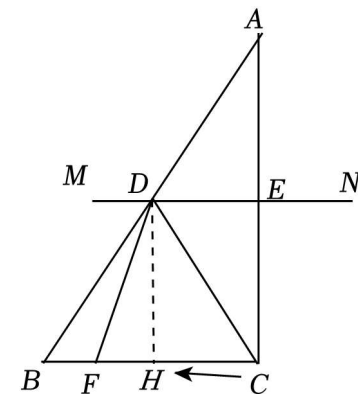
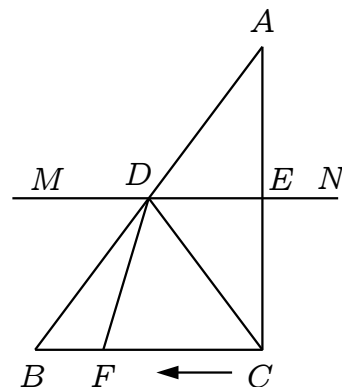
$$\therefore BD = DC = AD = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } CF = CD \text{ 时, } 2t = 5, \text{ 解得 } t = \frac{5}{2};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } CF = DF = 2t \text{ 时,}$$

过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 则四边形 $DHCF$ 是矩形,

$$\therefore DH = CE = \frac{1}{2}AC = 4,$$



在 $Rt\triangle CDH$ 中, $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

则 $FH = 2t - 3$,

在 $Rt\triangle CDH$ 中, $DF^2 = FH^2 + DH^2$,

$$\therefore (2t)^2 = (2t - 3)^2 + 4^2, \text{解得 } t = \frac{25}{12};$$

综上所述: t 的值为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{25}{12}$.

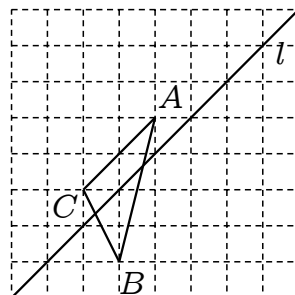
六、尺规网格画图

9. (2024 - 2025 期中·园区校·22) 如图, 在长度为 1 个单位长度的小正方形组成的正方形中, 点 A 、 B 、 C 在小正方形的顶点(格点)上.

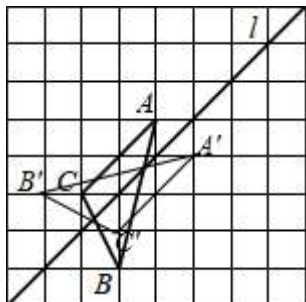
(1) 在图中画出与 $\triangle ABC$ 关于直线 l 成轴对称的 $\triangle A'B'C'$;

(2) 三角形 ABC 的面积为 _____;

(3) 顶点在格点, 与 $\triangle ABC$ 全等且仅有 1 条公共边, 这样的三角形共能画出 _____ 个.



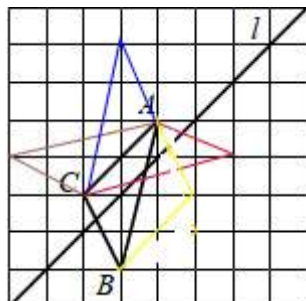
【解析】解: (1) 如图, $\triangle A'B'C'$ 为所作;



$$(2) \triangle ABC \text{ 的面积} = 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 3;$$

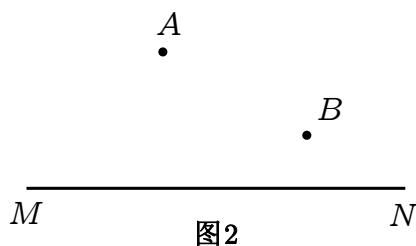
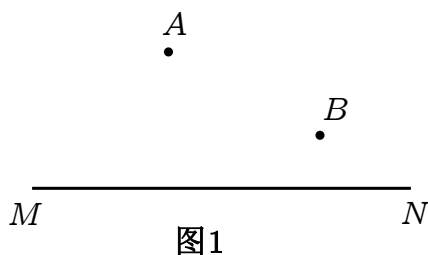
故答案为 3;

(3) 如图, 顶点在格点, 与 $\triangle ABC$ 全等且仅有 1 条公共边, 这样的三角形共能画出 4 个;

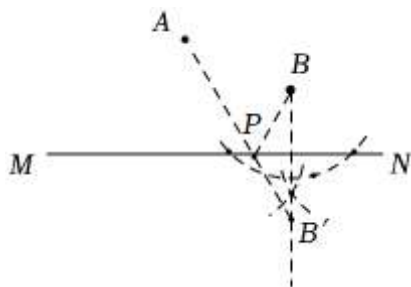


故答案为 4.

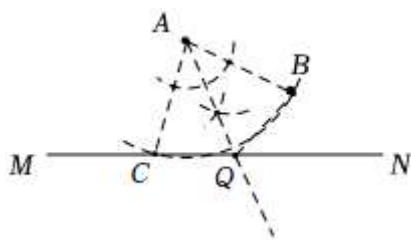
10. (2024-2025 期中·金鸡湖·附 3) 如图, 点 A 、点 B 是直线 MN 外同侧的两点, 请用无刻度的直尺与圆规完成下列作图.(不写作法保留作图痕迹)
- (1) 在图 1 中, 在直线 MN 上取点 P 使得 $\angle APM = \angle BPN$;
- (2) 在图 2 中, 在直线 MN 上取点 Q 使得 $\angle AQM = \angle AQB$.



【解析】解: (1) 如图, 点 P 即为所求;



(2) 如图点 Q 即为所求.



七、新定义

11. (2024-2025 期中·吴昊相·24) 阅读理解: 对于任意正整数 a, b , $\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, $\therefore a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, $\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 只有当 $a = b$ 时, 等号成立; 结论: 在 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (a, b 均为正实数) 中, 只有当 $a = b$ 时, $a + b$ 有最小值 $2\sqrt{ab}$.

(1) 若 $a > 0$, 当 $a + \frac{1}{a}$ 取最小值时, 求 a 的值.

(2) 若 $m > 1$, 求 $m + \frac{1}{m-1}$ 的最小值.

【解析】(1) 解: $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 2$, 当且仅当 $a = \frac{1}{a}$, 取等号

则 $a = 1$

$$(2) m + \frac{1}{m-1} = m - 1 + \frac{1}{m-1} + 1 \geq 2\sqrt{(m-1) \times \frac{1}{m-1}} + 1 = 3$$

当且仅当 $m - 1 = \frac{1}{m-1}$ 时取等号, 此时 $m = 2$

则 $m + \frac{1}{m-1}$ 的最小值为 3.

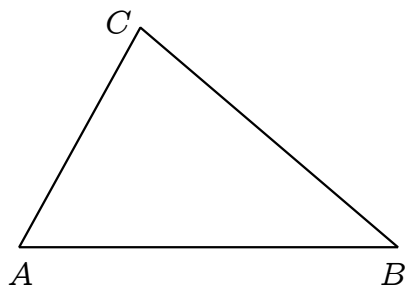
12. (2024—2025 期中·星海·25) 过三角形的顶点作射线与其对边相交, 将三角形分成两个三角形. 若得到的两个三角形中有等腰三角形, 这条射线就叫做原三角形的“友好分割线”.

(1) 下列三角形中, 不存在“友好分割线”的是 _____ (只填写序号).

①直角三角形; ②等边三角形; ③顶角为 110° 的等腰三角形.

(2) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, 过点 C 作射线 CD , 若 CD 为 $\triangle ABC$ 的“友好分割线”, 求 $\angle ACD$ 的度数;

(3) 如图 2, $\triangle ABC$ 中, CD 为 AB 边上的高, $BD = \sqrt{7}$, $AD = \sqrt{21}$, $\angle A = 30^\circ$, E 为 AD 的中点, 过点 E 作直线 l 交 AC 边于点 F , 作 $CM \perp l$, $DN \perp l$, 垂足为 M, N . 若射线 CD 为 $\triangle ABC$ 的“友好分割线”, 求 $CM + DN$ 的最大值.



(图1)

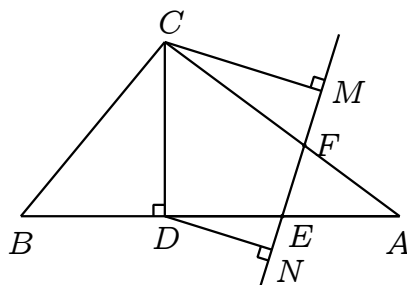


图2

【解析】解: (1) 根据“友好分割线”的定义可知, 等腰直角三角形, 顶角为 150° 的等腰三角形存在“友好分割线”. 等边三角形不存在“友好分割线”.

故答案为: ②;

(2) 如图 3-1 中, 当 $EC = EA$ 时, $\angle AEC = 60^\circ$,

当 $FC = FB$ 时, $\angle BFC = 100^\circ$,

当 $BC = BG$ 时, $\angle B = 40^\circ$.

如图 3-2 中, 当 $AC = AR$ 时, $\angle CAR = 20^\circ$,

当 $CA = CW$ 时, $\angle C = 80^\circ$,

如图 3-3 中, $BC = BQ$ 时, $\angle CBQ = 20^\circ$,

综上所述, 满足条件的等腰三角形的顶角的度数为: 20° , 40° , 60° , 80° 或 100° ;

(3) 解: 如图 2 中, 作 $AG \perp l$ 于点 G .

$\because CD$ 为 AB 边上的高,

$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ$.

$\therefore \angle ACD = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$.

$\therefore \triangle CDA$ 不是等腰三角形.

$\because CD$ 为 $\triangle ABC$ 的“友好分割线”,

$\therefore \triangle CDB$ 和 $\triangle CDA$ 中至少有一个是等腰三角形.

$\therefore \triangle CDB$ 是等腰三角形, 且 $CD = BD = \sqrt{7}$.

$\therefore \angle A = 30^\circ$,

$\therefore AC = 2CD = 2\sqrt{7}$.

$\because DN \perp l$ 于 N ,

$\therefore \angle DNE = \angle AGE = 90^\circ$.

$\because E$ 为 AD 的中点,

$\therefore BE = AE$.

在 $\triangle DNE$ 和 $\triangle AGE$ 中,
$$\begin{cases} \angle AGE = \angle DNE, \\ DE = AE, \\ \angle DEN = \angle AEG, \end{cases}$$

$\therefore \triangle DNE \cong \triangle AGE (ASA)$,

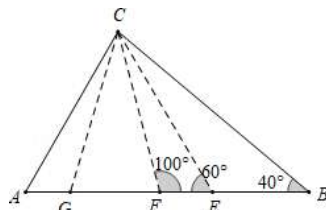


图3-1

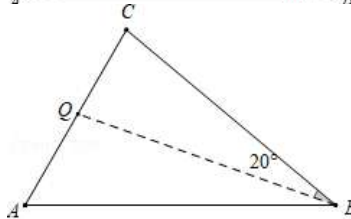
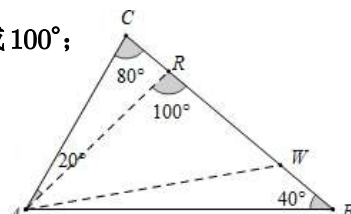


图3-3

$$\therefore DN = AG.$$

在 $Rt\triangle AGF$ 和 $Rt\triangle CMF$ 中, $\angle CMF = \angle AGF = 90^\circ$,

$$\therefore CM \leq CF, AG \leq AF,$$

$$\therefore CM + AG \leq CF + AF,$$

$$\text{即 } CM + AG \leq AC,$$

$$\therefore CM + DN \leq 2\sqrt{7},$$

$$\therefore CM + DN \text{ 的最大值为 } 2\sqrt{7}.$$

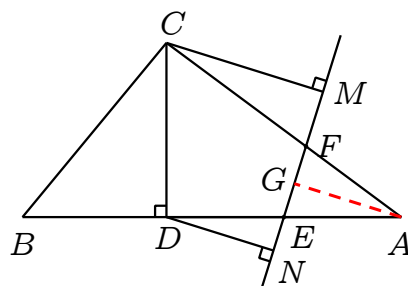


图2