

高数见林初二数学期中好题回头看(一)

参考答案与解析

一、二次根式计算

1. (2024-2025 期中·吴昊相新·8) 已知 $\sqrt{6}-1$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $3a+2b$ 的值为 ()

- A. $2\sqrt{6}-1$ B. $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{6}+1$ D. 5

【解析】解: 由题知: $a=1, b=\sqrt{6}-2$

则: $3a+2b=3\times 1+2\times (\sqrt{6}-2)=2\sqrt{6}-1$

故选: A.

【答案】A

2. (2024-2025 期中·胥江·24) 先阅读材料, 然后回答问题

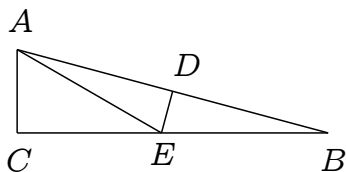
形如 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$ 的化简, 只要找到两个正数 x, y , 使 $x+y=a, xy=b$, 那么 $(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2=a, \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{b}$, 则有 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}(x>y)$

例如: 化简 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}\times 1+1}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\times\sqrt{1}+(\sqrt{1})^2}=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{1})^2}=\sqrt{5}-1$$

(1) 请根据你从上述材料中得到的启发, 化简 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=$; $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$.

(2) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, \angle B=15^\circ$, 其中边 AB 的垂直平分线分别交 AB, BC 于点 D, E , 当 $AC=1$ 时, 求 AB 的长 (结果要化为最简形式)



【解析】: (1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}\times 2+2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-2\sqrt{12}+3}=\sqrt{2^2-2\times 2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$$

故答案为: $\sqrt{3}+\sqrt{2}; 2-\sqrt{3}$;

(2) $\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore EA=EB,$$

$$\therefore \angle B=\angle EAB=15^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC=\angle B+\angle EAB=30^\circ,$$

$$\because \angle C=90^\circ, AC=1,$$

$$\therefore AE=2AC=2, CE=\sqrt{3}AC=\sqrt{3},$$

$$\therefore AE=BE=2,$$

$$\therefore BC=CE+BE=2+\sqrt{3},$$

$$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$\therefore AB$ 的长为 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

3. (2024-2025 期中·星湾·25) 小明在解决问题: 已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $2a^2 - 8a + 1$ 的值. 他是这样分析与解的:

$$\because a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

$$\therefore a-2 = -\sqrt{3}, \therefore (a-2)^2 = 3, a^2 - 4a + 4 = 3,$$

$$\therefore a^2 - 4a = -1, \therefore 2a^2 - 8a + 1 = 2(a^2 - 4a) + 1 = 2 \times (-1) + 1 = -1.$$

请你根据小明的分析过程, 解决如下问题:

(1) 观察上面解答过程, 请写出 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 化简 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}$;

(3) 若 $a = \frac{1}{\sqrt{26}-5}$, 请按照小明的方法求出 $a^3 - 11a^2 + 9a + 1$ 的值.

【解析】解: (1) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}} \\ &= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + 2-\sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2024}-\sqrt{2023} \\ &= -1 + \sqrt{2024} \\ &= 2\sqrt{506}-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \because a = \frac{1}{\sqrt{26}-5} = \frac{\sqrt{26}+5}{(\sqrt{26}+5)(\sqrt{26}-5)} = \sqrt{26}-5, \text{ 即 } (a-5)^2 = 26, \\ & \therefore a^2 - 10a = 1, a^3 = a \times a^2 = a \times (1+10a) = a + 10a^2, \\ & \therefore a^3 - 11a^2 + 9a + 1 \\ &= a + 10a^2 - 11a^2 + 9a + 1 \\ &= -a^2 + 10a + 1 \\ &= -(a^2 - 10a) + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. (2024-2025 期中·振华·24) 规律探索题: 细心观察如图, 认真分析各式, 然后解答问题:

$$OA_2^2 = (\sqrt{1})^2 + 1 = 2; S_1 = \frac{\sqrt{1}}{2} (S_1 \text{ 是 } \triangle OA_1A_2 \text{ 的面积});$$

$$OA_3^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3; S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_2 \text{ 是 } \triangle OA_2A_3 \text{ 的面积});$$

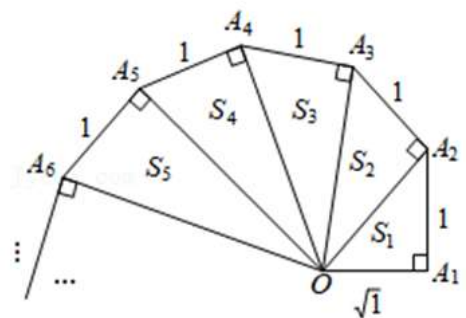
$$OA_4^2 = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4; S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (S_3 \text{ 是 } \triangle OA_3A_4 \text{ 的面积});$$

...

(1) 推算出 $OA_6^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $S_5 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 用含有 n (n 为正整数) 的等式 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 求出 $\frac{1}{S_1+S_2} + \frac{1}{S_2+S_3} + \frac{1}{S_3+S_4} + \cdots + \frac{1}{S_{99}+S_{100}}$ 的值.



【解析】解: (1) $OA_6^2 = \sqrt{6}, S_5 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$(2) S_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

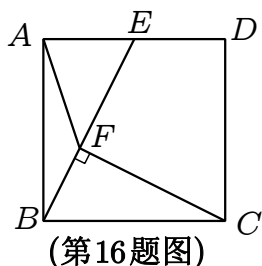
$$\begin{aligned} (3) & \frac{1}{S_1+S_2} + \frac{1}{S_2+S_3} + \frac{1}{S_3+S_4} + \cdots + \frac{1}{S_{99}+S_{100}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2} + \cdots + \frac{1}{\frac{\sqrt{99}}{2} + \frac{\sqrt{100}}{2}} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= 2(\sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \cdots + \sqrt{100}-\sqrt{99}) \end{aligned}$$

$$= 2 \times (10 - 1)$$

$$= 18$$

二、勾股定理求线段长度

5. (2024 - 2025 期中·吴昊相·16) 已知四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 E 是边 AD 上一点, 连接 BE , 过点 C 作 $CF \perp BE$ 于点 F , 连接 AF . 若 $AF = \sqrt{2}$, $BF = 1$, 则 $CF =$ _____.



(第16题图)

【解析】解: 过点 A 作 $AH \perp AF$,

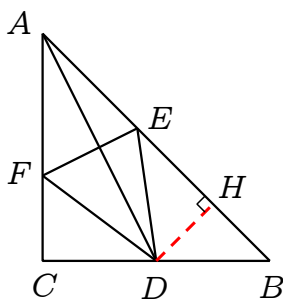
$$\because \triangle ABH \cong \triangle BCF (AAS)$$

$$\therefore BF = AH = 1$$

$$HF = \sqrt{AF^2 - AH^2} = 1, \text{ 则 } CF = BH = 1 + 1 = 2$$

【答案】2

6. (2024 - 2025 期中·园区校·16) 如图, 一张等腰直角三角形纸片, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, 将纸片沿 EF 折叠, 使点 A 恰好落在 BC 边的中点 D 处, 则 AE 的长度 = _____.



(第16题图)

【解析】解: 作 $DH \perp AB$ 于 H ,

$$\text{可得等腰 } Rt\triangle DBH, \text{ 由 } AB = 4, \text{ 可知 } BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2},$$

$$\text{于是 } BD = \sqrt{2}, BH = DH = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1 = 1,$$

$$\text{设 } AE = DE = x, \text{ 则 } EH = 4 - 1 - AE = 3 - x,$$

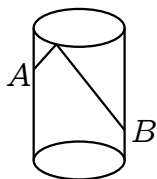
$$\text{在 } Rt\triangle DEH \text{ 中, } (3 - x)^2 + 1^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{3},$$

$$\text{故 } AE \text{ 的长度为 } \frac{5}{3}.$$

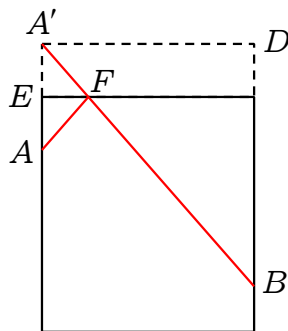
三、勾股定理最值相关

7. (2024 - 2025 期中·园区校·15) 如图, 圆柱形容器高为 12cm, 底面周长为 10cm. 在容器内壁距离容器底部 3cm 的点 B 处有一蚊子, 此时一只壁虎正好在容器外壁, 距离容器上沿 3cm 与蚊子相对的点 A 处, 则壁虎捕捉蚊子需爬行的最短距离为 _____ cm (不计壁厚).



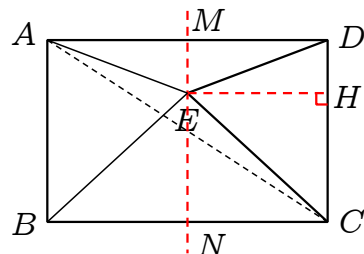
(第15题图)

【解析】解: 如图: \because 高为 12cm, 底面周长为 10cm, 在容器内壁离容器底部 3cm 的点 B 处有一蚊子, 此时一只壁虎正好在容器外壁, 离容器上沿 3cm 与蚊子相对的点 A 处, $\therefore A'D = 5\text{cm}, BD = 12\text{cm}$, 将容器侧面展开, 作 A 关于 EF 的对称点 A', 连接 A'B, 则 A'B 即为最短距离, $A'B = \sqrt{A'D^2 + BD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{cm}) = 3(\text{Cm})$. 故壁虎捕捉蚊子的最短距离为 13Cm. 故答案为: 13.



8. (2024 - 2025 期中·星湾·18) 如图, 长方形 ABCD 中, $AB = 4$, 点 E 是长方形 ABCD 内的一个动点, 且 $\triangle CDE$ 的面积始终等于长方形 ABCD 面积的 $\frac{1}{4}$. 若 $EA + EB$ 的最小值为 6, 则 AD 的长为 _____.

【解析】解: 过点 E 作 $EH \perp CD$ 于点 H $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}EH \times CD = \frac{1}{4} \times CD \times AD \Rightarrow EH = \frac{1}{2}AD$ 故 E 点的轨迹为 AD 的垂直平分线 MN 连接 EA, EB 则 $EB = EC$ 如图: 当点 A, E, C 三点共线是, $EA + EB$ 的最小值为 $AC = 6$ 此时 $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$



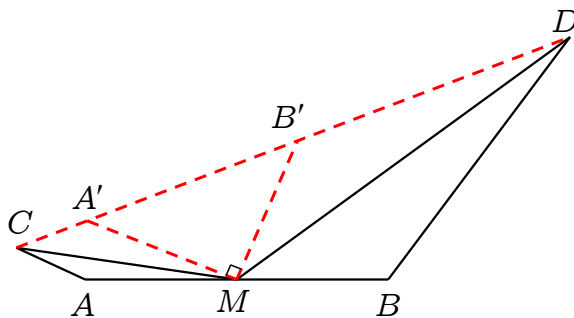
(第18题图)

【答案】 $2\sqrt{5}$

9. (2024 - 2025 期中·平江草桥·18) 如图, 线段 AC、BD 在 AB 的同侧, 点 M 为线段 AB 中点, $AC = 2, BD = 8, AB = 8$, 若 $\angle CMD = 135^\circ$, 则线段 CD 的最大值为 _____.

【解析】解: 如图, 作点 A 关于 CM 的对称点 A', 点 B 关于 DM 的对称点 B'.

$\because \angle CMD = 135^\circ$, $\therefore \angle AMC + \angle DMB = 45^\circ$, $\therefore \angle CMA' + \angle DMB' = 45^\circ$, $\therefore \angle A'MB' = 90^\circ$, $\because MA' = MB'$, $\therefore \triangle A'MB'$ 为等腰直角三角形, $\therefore CD \leq CA' + A'B' + B'D = CA + \sqrt{2}AM + BD = 2 + 4\sqrt{2} + 8 = 10 + 4\sqrt{2}$, $\therefore CD$ 的最大值为 $10 + 4\sqrt{2}$, 故答案为: $10 + 4\sqrt{2}$



(第16题图)

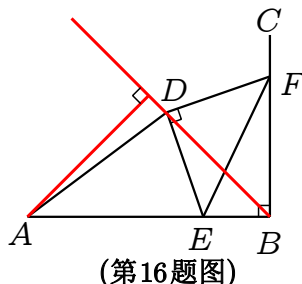
10. (2024-2025 期中·立达·16) 如图, $AB \perp BC$, $AB=8$, 点 E 、 F 分别是线段 AB 、射线 BC 上的动点, 以 EF 为斜边向上作等腰 $Rt\triangle DEF$, $\angle EDF=90^\circ$, 连接 AD , 则 AD 的最小值为 _____.

【解析】解: 连接 BD 并延长, 如图,

$\because AB \perp BC$,
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $\angle EDF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABC + \angle EDF = 180^\circ$,
 $\therefore \triangle DEF$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore \angle DEF = \angle DFE = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DBF = \angle DEF = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DBF = \angle DBE = 45^\circ$,
 \therefore 点 D 的轨迹为 $\angle ABC$ 的平分线上,
 \therefore 垂线段最短,
 \therefore 当 $AD \perp BD$ 时, AD 取最小值,
 $\therefore AD$ 的最小值为

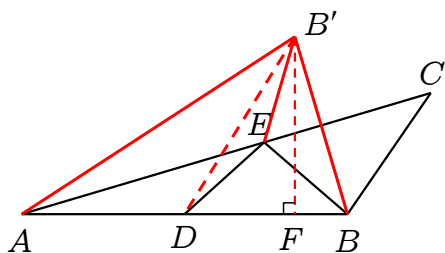
$$AB=8, AD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2},$$

故答案为: $4\sqrt{2}$



(第16题图)

11. (2024-2025 期中·昆太常张·15) 如图, 在钝角三角形 ABC 中, $\angle CAB = 15^\circ$, $AB=2$. 点 D 是 AB 边上任意一点, 点 E 是 AC 边上一动点, 当 $DE+BE$ 取得最小值时, AD 的长为 _____.



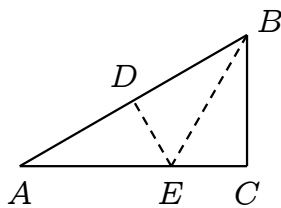
(第15题图)

【解析】解: 作点 B 关于直线 AC 的对称点 B' , 连接 AB' 、 BB' 、 $B'E$ 、 $B'D$,

$\because AC$ 垂直平分 BB' ,
 $\therefore B'E = BE$, $AB' = AB = 2$,
 $\therefore \angle CAB' = \angle CAB = 15^\circ$,
 $\therefore \angle BAB' = 2\angle CAB = 30^\circ$,
 作 $B'F \perp AB$ 于点 F , 则 $\angle AFB' = 90^\circ$,
 $\therefore B'F = \frac{1}{2} AB' = 1$,
 $\therefore AF = \sqrt{AB'^2 - B'F^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,
 $\because DE + BE = DE + B'E$, 且 $DE + B'E \geq B'D$,
 \therefore 当 $DE + B'E = B'D$, 且 $B'D$ 的值最小时, $DE + BE$ 的值最小,
 $\because B'D \geq B'F$,
 \therefore 当点 D 与点 F 重合时, $B'D = B'F$, 此时 $B'D$ 的值最小,
 $\therefore AD = AF = \sqrt{3}$,

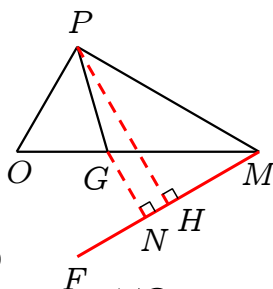
故答案为: $\sqrt{3}$

12. (2024-2025 期中·金鸡湖·18) 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 点 C 沿 BE 折叠与 AB 上的点 D 重合, 连接 DE , 可以探究得到: $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$; 请在这一结论的基础上继续思考: 如图②, 在 $\triangle OPM$ 中, $\angle OPM = 90^\circ$, $\angle M = 30^\circ$, 若 $OM = 2$, 点 G 是 OM 边上的动点, 则 $PG + \frac{1}{2}MG$ 的最小值为 _____.



图①

(第18题图)



图②

【解析】解: 如图, 在 OM 下方作 $\angle OMF = 30^\circ$, 过点 P 作 $PH \perp MF$ 于点 H , 过点 G 作 $GN \perp MF$ 于点 N , 则 $\angle PHM = \angle GNM = 90^\circ$,

$$\therefore GN = \frac{1}{2}MG,$$

$$\therefore PG + \frac{1}{2}MG = PG + GN,$$

结合图形可知, 当 P, G, N 三点共线时, $PG + MG = PG + GN$ 有最小值, 且最小值即为 PH 的长,

$$\because \angle OPM = 90^\circ, \angle OMP = 30^\circ, OM = 2,$$

$$\therefore OP = OM = 1,$$

$$\therefore PM = \sqrt{OM^2 - OP^2} = \sqrt{3},$$

$$\because \angle PMH = \angle OMP + \angle OMF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle HPM = 90^\circ - \angle PMH = 30^\circ,$$

$$\therefore HM = \frac{1}{2}PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore PH = \sqrt{PM^2 - HM^2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore PG + \frac{1}{2}MG \text{ 的最小值为 } \frac{3}{2}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

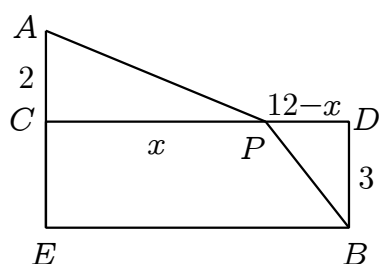
13. (2024-2025 期中·金鸡湖·附1) 数学教育家波利亚曾说: “对一个数学问题, 改变它的形式, 变换它的结构, 直到发现有价值的东西, 这是数学解题的一个重要原则”. 在复习二次根式时, 老师提出了一个求代数式最小值的问题, 如: “当 $0 < x < 12$ 时, 求代数式 $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(12-x)^2 + 9}$ 的最小值”, 其中 $\sqrt{x^2 + 4}$ 可看作两直角边分别为 x 和 2 的 $Rt\triangle ACP$ 的斜边长, $\sqrt{(12-x)^2 + 9}$ 可看作两直角边分别是 $12-x$ 和 3 的 $Rt\triangle BDP$ 的斜边长. 于是构造出如图, 将问题转化为求 $AP + BP$ 的最小值, 运用此方法, 请你解决问题: 已知 x, y 均为正数, 且 $x - 6 = -y$. 则 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 25}$ 的最小值是 ()

A. $2\sqrt{10}$

B. 8

C. 10

D. 34



【解析】解：∵ $x - 6 = -y$,

$$\therefore y = 6 - x,$$

$\sqrt{x^2 + 3^2}$ 和 $\sqrt{(6-x)^2 + 5^2}$ 是勾股定理的形式, $\sqrt{x^2 + 3^2}$ 是直角边分别是 x 和 3 的直角三角形的斜边, $\sqrt{(6-x)^2 + 5^2}$ 是直角边分别是 $6-x$ 和 5 的直角三角形的斜边, 因此, 我们构造两个直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$, 并使直角边 BC 和 EF 在同一直线上向右平移直角三角形 ABC 使点 B 和 E 重合, 这时 $CF = x + 6 - x = 6$, $AC = 3$, $DF = 5$, 问题就变成“点 B 在线段 CF 的何处时, $AB + DB$ 最短?”, 根据两点间线段最短, 得到线段 AD 就是它们的最小值.

当 A 、 B 、 D 共线时, $AB + BD$ 最小,

在 $Rt\triangle AMD$ 中, $AD = \sqrt{AM^2 + DM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$,

∴ $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 25}$ 的最小值是 10.

故选: C.

