

2024年初三数学期中考试复习冲刺练习(8)

参考答案与试题解析

1. 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1$ (a 为常数, 且 $a < 0$) 的图象上有三点 $A(-2, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(3, y_3)$, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_2 < y_1 < y_3$ D. $y_2 < y_3 < y_1$

【解析】解: \because 二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1$ (a 为常数, 且 $a < 0$) 的图象上有三点 $A(-2, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(3, y_3)$,

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{-2a}{2a} = 1.$$

设点 A 的对称点为 (x_0, y_1) ,

$$\text{所以 } \frac{-2+x_0}{2} = 1.$$

$$\text{解得 } x_0 = 4,$$

\therefore 点 A 的对称点为 $(4, y_1)$.

$$\because a < 0,$$

\therefore 抛物线开口向下.

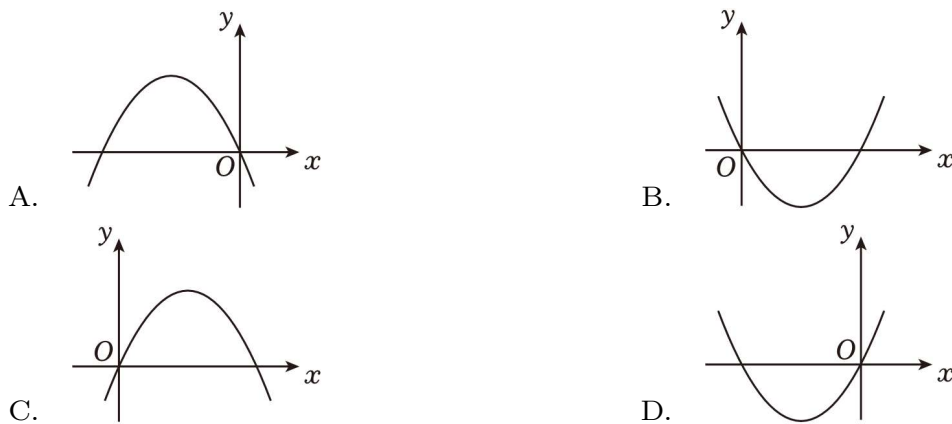
\therefore 对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增减小.

$$\because 4 > 3 > 1,$$

所以 $y_1 < y_3 < y_2$.

故选: B.

2. 已知一次函数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 的图象经过第一、二、四象限, 则二次函数 $y = ax^2 - bx$ ($a \neq 0$) 的图象大致为 ()



【解析】解: \because 一次函数 $y = ax + b$ 的图象经过第一、二、四象限,

$$\therefore a < 0, b > 0.$$

\therefore 二次函数 $y = ax^2 - bx$ 的图象, 开口向下, 与 x 轴交于点 $(0, 0)$ 和 $(\frac{b}{a}, 0)$.

符合函数性质的图象是 A.

故选: A.

3. 二次函数 $y = x^2 - x + a$ ($0 < a < \frac{1}{4}$), 若当 $x = t$ 时, $y < 0$, 则当 $x = t - 1$ 时, 函数值 y 的取值范围是 ()

A. $0 < y < \frac{1}{2}$ B. $0 < y < 2$ C. $\frac{1}{2} < y < 1$ D. $\frac{1}{2} < y < 2$

【解析】解: 由题意得, 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\because 0 < a < \frac{1}{4},$$

$$\therefore 0 < 4a < 1.$$

$$\therefore \Delta = 1 - 4a > 0.$$

设 $y = x^2 - x + a$ ($0 < a < \frac{1}{4}$) 与 x 轴交点为 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ (其中 $x_1 < x_2$),

\therefore 当 $x = t$ 时, $y < 0$, 且抛物线开口向上,

$$\therefore x_1 < t < x_2,$$

\therefore 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ 或 1 时, $y = a > 0$,

$$\therefore 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x_2 < 1.$$

$$\therefore x_1 - 1 < t - 1 < x_2 - 1 < 0,$$

\therefore 当 $x_1 - 1 < x < x_2 - 1$ 时, y 随着 x 的增大而减少,

$$\therefore \text{当 } x = t - 1 \text{ 时, } y < (x_1 - 1)^2 - (x_1 - 1) + a = 2 - 2x_1, y > (x_2 - 1)^2 - (x_2 - 1) + a = 2 - 2x_2,$$

$$\therefore 0 < x_1 < \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{当 } x = t - 1 \text{ 时, } y < 2,$$

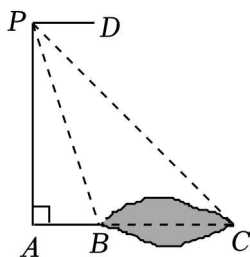
$$\therefore \frac{1}{2} < x_2 < 1,$$

$$\therefore \text{当 } x = t - 1 \text{ 时, } y > 0,$$

\therefore 函数值 y 的取值范围为 $0 < y < 2$.

故选: B.

4. 某数学兴趣小组借助无人机测量一条河流的宽度 BC . 如图, 无人机在 P 处测得正前方河流的点 B 处的俯角 $\angle DPB = \alpha$, 点 C 处的俯角 $\angle DPC = 45^\circ$, 点 A, B, C 在同一条水平直线上. 若 $AP = 45m$, $\tan \alpha = 3$, 则河流的宽度 BC 为 ()



- A. 30m B. 25m C. 20m D. 15m

【解析】解: 由题意得: $PA \perp AC$, $PD \parallel AC$,

$$\therefore \angle DPC = \angle ACP = 45^\circ, \angle DPB = \angle ABP = \alpha,$$

在 $Rt\triangle ACP$ 中, $AP = 45m$,

$$\therefore AC = \frac{AP}{\tan 45^\circ} = 45(m),$$

在 $Rt\triangle ABP$ 中, $\tan \alpha = 3$,

$$\therefore AB = \frac{AP}{\tan \alpha} = \frac{45}{3} = 15(m),$$

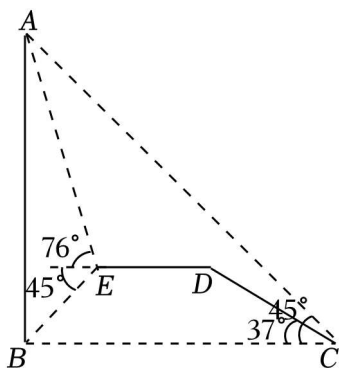
$$\therefore BC = AC - AB = 45 - 15 = 30(m),$$

\therefore 河流的宽度 BC 为 $30m$,

故选: A.

5. 如图, 为了测量大楼 AB 的高度, 小明在 C 点测得大楼顶端 A 的仰角为 45° , 从 C 点沿倾斜角为 37° 的斜坡走到点 D , 再水平向左走 $16m$ 达到点 E , 在 E 处测得大楼顶端 A 的仰角为 76° , 同时测得大楼底端 B 的俯角为 45° , 求大楼 AB 的高度.

(参考数据: $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\tan 76^\circ \approx 4$.)



【解析】解：过点 D 作 $DF \perp BC$ ，垂足为 F ，过点 E 作 $EG \perp AB$ ，垂足为 G ，

由题意得： $BG = DF$ ， $DG = BF$ ， $DE = 16$ 米，

设 $CF = x$ 米，

在 $Rt\triangle CDF$ 中， $\angle DCF = 37^\circ$ ，

$\therefore DF = CF \cdot \tan 37^\circ \approx 0.75x$ (米)，

$\therefore BG = DF = 0.75x$ 米，

在 $Rt\triangle BGE$ 中， $\angle BEG = 45^\circ$ ，

$\therefore EG = \frac{BG}{\tan 45^\circ} = 0.75x$ (米)，

$\therefore BF = DG = EG + DE = (16 + 0.75x)$ 米，

$\therefore BC = BF + CF = (16 + 1.75x)$ 米，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 45^\circ$ ，

$\therefore AB = BC \cdot \tan 45^\circ = (16 + 1.75x)$ 米，

在 $Rt\triangle AEG$ 中， $\angle AEG = 76^\circ$ ，

$\therefore AG = EG \cdot \tan 76^\circ \approx 3x$ (米)，

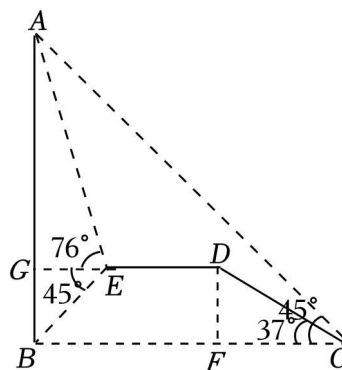
$\therefore AB = AG + BG = 3.75x$ (米)，

$\therefore 3.75x = 16 + 1.75x$ ，

解得： $x = 8$ ，

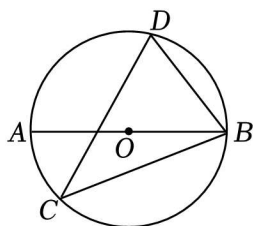
$\therefore AB = 3.75x = 30$ (米)，

\therefore 大楼 AB 的高度约为 30 米。



6. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上的两点，若 $\angle ABD = 54^\circ$ ，则 $\angle BCD$ 的度数是

()



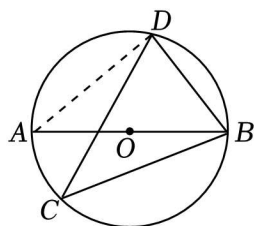
A. 36°

B. 40°

C. 46°

D. 65°

【解析】解：连接 AD ，



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\because \angle ABD = 54^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ - \angle ABD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle BCD = 36^\circ,$$

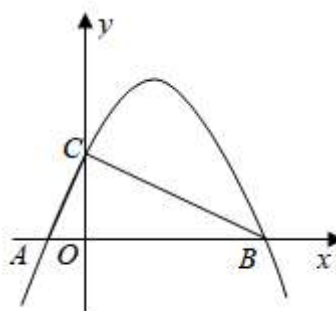
故选: A.

7. 如图(1), 抛物线 $y = a(x+2)(x-8)$ ($a < 0$) 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 连接 AC 、 BC , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 20.

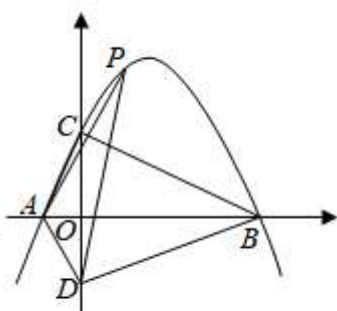
(1) 求 a 的值, 并判断 $\triangle ABC$ 是什么特殊三角形, 说明理由;

(2) 如图(2), 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴翻折, 点 C 的对称点是点 D , 若点 P 是抛物线在第一象限图象上的一个动点, 设点 P 的横坐标为 m , 连接 AP 、 DP , 求当 m 为何值时, $\triangle ADP$ 的面积最大;

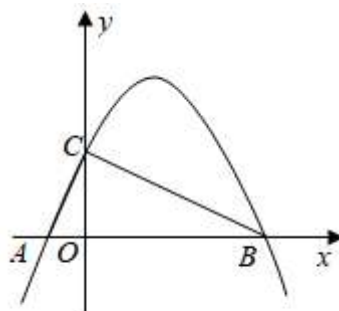
(3) 若点 Q 是上述抛物线上一点, 且满足 $\angle ABQ = 2\angle ABC$, 求满足条件的点 Q 的坐标.



图(1)



图(2)



备用图

【解析】解: (1) 令 $y = 0$, 则 $a(x+2)(x-8) = 0$,

解得 $x = -2$ 或 $x = 8$,

$\therefore A(-2, 0), B(8, 0)$,

$\therefore AB = 10$,

$\because \triangle ABC$ 的面积为 20,

$\therefore OC = 4$,

$\therefore C(0, 4)$, 代入抛物线解析式可得, $a = -\frac{1}{4}$,

$\therefore A(-2, 0), B(8, 0), C(0, 4)$,

$\therefore AB = 10, AC = 2\sqrt{5}, BC = 4\sqrt{5}$,

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle ACB = 90^\circ$.

(2) 由题意可得 $D(0, -4)$,

过点 P 作 AD 的平行线, 则点 P 到 AD 的距离是两平行线之间的距离, 当平行线与抛物线相切时, 即只有一个交点时距离最大,

$\therefore A(-2, 0), D(0, -4)$,

\therefore 直线 AD 的表达式为: $y = -2x - 4$,

\therefore 设过点 P 的平行 AD 的直线为 $y = -2x + b$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -2x + b \\ y = -\frac{1}{4}(x+2)(x-8) \end{cases},$$

化简得, $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + 4 - b = 0$,

$\therefore \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times (4 - b) = 0$, 解得 $b = \frac{65}{4}$,

$\therefore y = -2x + \frac{65}{4}$,

代入上式可得, $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{49}{4} = 0$, 解得 $x_1 = x_2 = 7$,

$\therefore P\left(7, \frac{9}{4}\right)$,

∴ 当 $m=7$ 时, $\triangle ADP$ 的面积有最大值.

(3) 如图, 当点 Q 在 BC 的上方时为 Q_1 , 此时 $\angle ABQ_1 = 2\angle ABC$,

∴ BC 平分 $\angle ABQ_1$,

∴ $B(8,0)$,

设 $BQ_1: y = kx - 8k$,

设 BQ_1 与 y 轴的交点为 M , 过点 C 作 $CH \perp BQ_1$ 于点 H ,

∴ $\angle MOB = \angle CHM = 90^\circ$, $\angle CMH = \angle OMB$,

∴ $\triangle MOB \sim \triangle GHC$,

∴ $OM:OB = HM:HC$,

∴ BC 平分 $\angle ABQ_1$, $CO \perp OB$, $CH \perp BQ_1$,

∴ $BO = BH = 8$, $CH = OC = 4$,

∴ $OM = -8k$,

∴ $MH = -4k$,

∴ $MB = HM + HB = 8 - 4k$,

在 $Rt\triangle OMB$ 中, $BO^2 + OM^2 = BM^2$,

即 $(-8k)^2 + 8^2 = (8 - 4k)^2$, 解得 $k = 0$ (舍去) 或 $k = \frac{4}{3}$,

∴ $BQ_1: y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}$,

∴ $-\frac{4}{3}x + \frac{32}{3} = -\frac{1}{4}(x+2)(x-8)$, 解得 $x = 8$ (舍去) 或 $x = \frac{10}{3}$,

∴ $Q_1(\frac{10}{3}, \frac{56}{9})$;

当点 Q 在 BC 下方时, 即为 Q_2 ,

∴ $\angle ABQ_1 = \angle ABQ_2$,

∴ 直线 BQ_1 与 BQ_2 关于 x 轴对称,

∴ 直线 $BQ_2: y = \frac{4}{3}x - \frac{32}{3}$,

∴ $\frac{4}{3}x - \frac{32}{3} = -\frac{1}{4}(x+2)(x-8)$, 解得 $x = 8$ (舍去) 或 $x = -\frac{22}{3}$,

∴ $Q_2(-\frac{22}{3}, -\frac{184}{9})$.

综上, 点 Q 的坐标为 $Q_1(\frac{10}{3}, \frac{56}{9})$; $Q_2(-\frac{22}{3}, -\frac{184}{9})$.

