

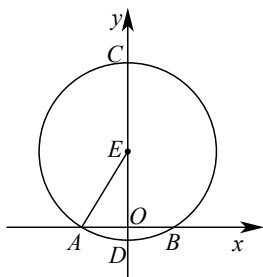
2024 秋季初三数学期中每日一题 004

1. 平面上一点 A 与 $\odot O$ 上的点的最短距离为 2, 最长距离为 10, 则 $\odot O$ 的半径为_____.

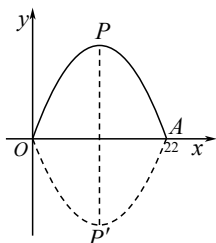
2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, 函数 y 与自变量 x 的部分对应值如表所示:

x	\cdots	-5	-4	-3	-2	-1	\cdots
y	\cdots	-8	-3	0	1	0	\cdots

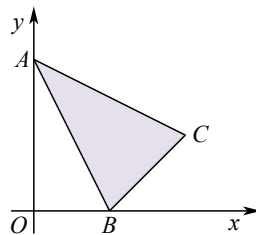
当 $y > -3$ 时, x 的取值范围是_____.



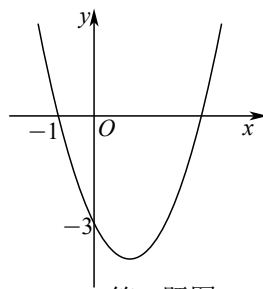
第 2 题图



第 5 题图



第 6 题图



第 8 题图

3. 如图, 点 E 在 y 轴上, $\odot E$ 与 x 轴交于点 A 、 B , 与 y 轴交于点 C 、 D , 若 $C(0, 9)$, $D(0, -1)$, 则线段 AB 的长度为_____.

4. 如果二次函数 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ($a_1 \neq 0$, a_1, b_1, c_1 是常数) 与 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c 是常数) 满足 $a_1 + a = 0$, $b_1 = b$, $c_1 + c = 0$, 那么称这两个函数互为“旋转函数”. 若函数 $y = -x^2 + \frac{4}{3}mx - 2$ 与 $y = x^2 - 2nx + n$ 互为旋转函数, 则 $(m+n)^{2023}$ 的值为_____.

5. 古时乾隆皇帝曾在秋日路过卢沟桥, 赋诗“半钩留照三秋淡, 一练分波平镜明”于此, 并题“卢沟晓月”, 立碑于桥头. 卢沟桥主桥拱可以近似看作抛物线, 桥拱在水面的跨度 OA 约为 22 米, 若按如图所示方式建立平面直角坐标系, 则主桥拱所在抛物线可以表示为 $y = -\frac{13}{121}(x-11)^2 + k$, 则主桥拱最高点 P 与其在水中倒影 P' 之间的距离为_____米.

6. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(0, 2)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(2, 1)$, 若二次函数 $y = x^2 + bx + 1$ 的图象与阴影部分 (含边界) 一定有公共点, 则实数 b 的取值范围是 ()

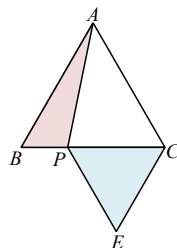
- A. $b \leq -2$ B. $b < -2$ C. $b \geq -2$ D. $b > -2$

7. 抛物线 $y = x^2 - mx - m + 1$ 的顶点在第四象限, 则 m 的取值范围是_____.

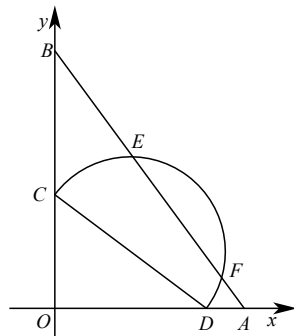
8. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 过 $(-1, 0)$, $(0, -3)$ 两点, 且顶点在第四象限. 设 $M = 6a + 3b + c$, 则 M 的取值范围是 ()

- A. $-6 < M < 15$ B. $-12 < M < 15$ C. $-12 < M < 21$ D. $0 < M < 27$

9. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 P 是边 BC 上的一点, 且 $CP > BP$, 以 PC 为边作等边 $\triangle PCE$. 若 $\triangle PAB$ 的面积与 $\triangle PCE$ 的面积相等, 则 $\frac{BP}{CP}$ 的值为_____.



10. 如图所示,平面直角坐标系中,直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 分别交 y 轴、 x 轴于点 A 、 B ,点 C 、点 D 是 y 轴正半轴、 x 轴正半轴上的两个动点, $CD = 6$,以 CD 为直径在第一象限内作半圆,与线段 AB 交于点 E 、 F 两点,则 EF 的最大值为_____.



11. “筒车”是一种以水流作动力,取水灌田的工具,据史料记载,它发明于隋而盛于唐,距今已有 1000 多年的历史,是我国古代劳动人民的一项伟大创造.

如图 2,“筒车”盛水筒的运行轨迹是以轴心 O 为圆心的圆,已知圆心 O 在水面上方,且当圆被水面截得的弦 AB 为 6 米时,水面下盛水筒的最大深度为 1 米(即水面下方圆上部分一点距离水面的最大距离).

(1) 求该圆的半径;

(2) 若水面上涨导致圆被水面截得的弦 AB 从原来的 6 米变为 8 米时,则水面上涨的高度为多少米?



图 1

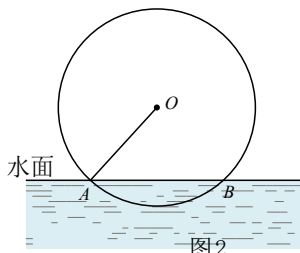
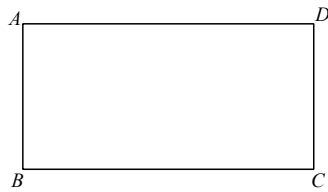
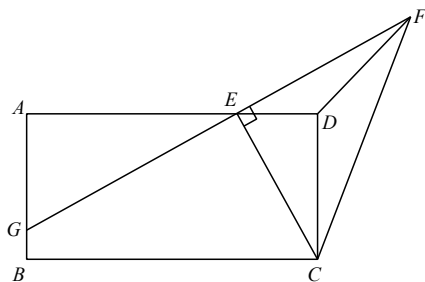


图 2

12. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$,动点 E 在 AD 边上以每秒 1cm 的速度由点 D 向点 A 运动,设动点 E 运动的时间为 $t(\text{s})$,连接 CE ,过点 E 作 $GE \perp CE$ 交 AB 边于点 G ,延长 GE 至点 F ,使得 $FE = \frac{6}{5}CE$,连接 CF , DF . (1) 当点 E 由点 D 运动到点 A 时,点 G 运动的路程为____ cm ; (2) 设 $\triangle FDE$ 的面积为 $S_1(\text{cm}^2)$, $\triangle FDC$ 的面积为 $S_2(\text{cm}^2)$,求 S_1 , S_2 与 t 的函数表达式,并写出自变量 t 的取值范围; (3) 当 FD 所在直线经过 CE 中点时,求 t 的值.



1. 平面上一点 A 与 $\odot O$ 上的点的最短距离为 2, 最长距离为 10, 则 $\odot O$ 的半径为 6 或 4.

【解答】解: 当点 A 在圆内时, $\odot O$ 的直径长为 $10 + 2 = 12$, 半径为 6;

当点 A 在圆外时, $\odot O$ 的直径长为 $10 - 2 = 8$, 半径为 4; 即 $\odot O$ 的半径长为 6 或 4.

2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, 函数 y 与自变量 x 的部分对应值如表所示:

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	...
y	...	-8	-3	0	1	0	...

当 $y > -3$ 时, x 的取值范围是 $-4 < x < 0$.

【解答】解: 由表可知, 二次函数的对称轴为直线 $x = -2$, 抛物线的开口向下,

且 $x = 0$ 时, $y = -3$, 所以, $y > -3$ 时, x 的取值范围为 $-4 < x < 0$. 故答案为: $-4 < x < 0$.

3. 如图, 点 E 在 y 轴上, $\odot E$ 与 x 轴交于点 A 、 B , 与 y 轴交于点 C 、 D , 若 $C(0, 9)$, $D(0, -1)$, 则线段 AB 的长度为 6.

【解答】解: $\because C(0, 9)$, $D(0, -1)$,

$\therefore OD = 1$, $OC = 9$,

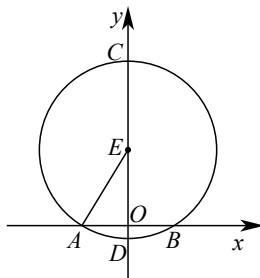
$\therefore CD = 10$,

$\therefore EA = ED = \frac{1}{2}CD = 5$, $OE = 5 - 1 = 4$,

$\therefore AB \perp CD$,

$\therefore AO = BO = \frac{1}{2}AB$, $OA = \sqrt{EB^2 - OE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore AB = 2OB = 6$; 故答案为: 6.



4. 如果二次函数 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ($a_1 \neq 0$, a_1, b_1, c_1 是常数) 与 $y = ax^2 + b_2x + c_2$ ($a_2 \neq 0$, a_2, b_2, c_2 是常数) 满足 $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 = b_2$, $c_1 + c_2 = 0$, 那么称这两个函数互为“旋转函数”. 若函数 $y = -x^2 + \frac{4}{3}mx - 2$ 与 $y = x^2 - 2nx + n$ 互为旋转函数, 则 $(m + n)^{2023}$ 的值为 -1.

【解答】解: \because 函数 $y = -x^2 + \frac{4}{3}mx - 2$ 与 $y = x^2 - 2nx + n$ 互为旋转函数,

$\therefore \begin{cases} \frac{4}{3}m = -2n \\ -2 + n = 0 \end{cases}$, 解得 $m = -3$, $n = 2$, $\therefore (m + n)^{2023} = (-3 + 2)^{2023} = -1$, 故答案为: -1.

5. 古时乾隆皇帝曾在秋日路过卢沟桥, 赋诗“半钩留照三秋淡, 一练分波平镜明”于此, 并题“卢沟晓月”, 立碑于桥头. 卢沟桥主桥拱可以近似看作抛物线, 桥拱在水面的跨度 OA 约为 22 米, 若按如图所示方式建立平面直角坐标系, 则主桥拱所在抛物线可以表示为 $y = -\frac{13}{121}(x - 11)^2 + k$, 则主桥拱最高点 P 与其在水中倒影 P' 之间的距离为 26 米.

【解答】解: 由题意知 $OA = 22$, 抛物线经过点 $A(22, 0)$,

代入解析式中: 得到: $0 = -\frac{13}{121}(22 - 11)^2 + k$,

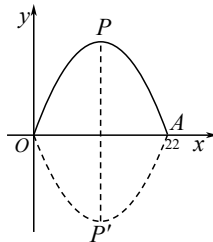
解得 $k = 13$,

\therefore 抛物线的顶点坐标为 $P(11, 13)$,

$\therefore P'(11, -13)$,

\therefore 主桥拱最高点 P 与其在水中倒影 P' 之间的距离为 $2 \times 13 = 26$ 米,

故答案为: 26.



6. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(0,2)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(2,1)$, 若二次函数 $y = x^2 + bx + 1$ 的图象与阴影部分 (含边界) 一定有公共点, 则实数 b 的取值范围是 (**C**)

A. $b \leq -2$

B. $b < -2$

C. $b \geq -2$

D. $b > -2$

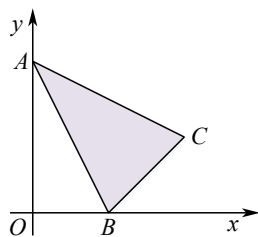
【解答】解: 抛物线 $y = x^2 + bx + 1$ 与 y 轴的交点为 $(0,1)$,

$\therefore C(2,1)$,

\therefore 对称轴 $x = -\frac{b}{2} \leq 1$ 时, 二次函数 $y = x^2 + bx + 1$ 的图象

与阴影部分 (含边界) 一定有公共点,

$\therefore b \geq -2$. 故选: C.



7. 抛物线 $y = x^2 - mx - m + 1$ 的顶点在第四象限, 则 m 的取值范围是 **$m > -2 + 2\sqrt{2}$** .

【解答】解: \therefore 抛物线 $y = x^2 - mx - m + 1$ 的顶点在第四象限, 且抛物线开口向上,

\therefore 抛物线与 x 轴有 2 个交点, 且抛物线对称轴在 y 轴右侧,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{-m}{2} > 0 \\ m^2 - 4(-m+1) > 0 \end{cases}, \therefore m > -2 + 2\sqrt{2}, \text{ 故答案为: } m > -2 + 2\sqrt{2}.$$

8. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 过 $(-1,0)$, $(0,-3)$ 两点, 且顶点在第四象限. 设 $M = 6a + 3b + c$, 则 M 的取值范围是 (**B**)

A. $-6 < M < 15$

B. $-12 < M < 15$

C. $-12 < M < 21$

D. $0 < M < 27$

【解答】解: 将 $(-1,0)$ 与 $(0,-3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\therefore 0 = a - b + c, c = -3. \therefore b = a - 3.$$

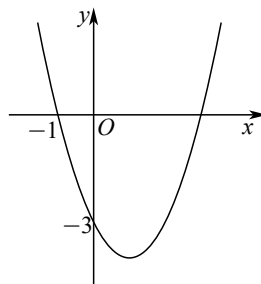
$$\therefore M = 6a + 3(a - 3) - 3 = 9a - 12.$$

\therefore 抛物线顶点在第四象限, $\therefore -\frac{b}{2a} > 0, a > 0$.

$$\therefore b < 0. \therefore a < 3. \therefore 0 < a < 3.$$

$$\therefore 0 < 9a < 27. \therefore -12 < 9a - 12 < 15.$$

$$\therefore -12 < M < 15. \text{ 故选: B.}$$



9. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 P 是边 BC 上的一点, 且 $CP > BP$, 以 PC 为边作等边 $\triangle PCE$. 若 $\triangle PAB$ 的面积与 $\triangle PCE$ 的面积相等, 则 $\frac{BP}{CP}$ 的值为 **$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$** .

【解答】解: 作 $AM \perp BC$ 于 M , $EN \perp BC$ 于 N , 设 $BP = a$, $PC = b$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB = BC = a + b$,

$$\therefore \sin \angle ABM = \frac{AM}{AB}, \therefore AM = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b),$$

$$\therefore \triangle ABP \text{ 的面积} = \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b) = \frac{\sqrt{3}}{4}a(a + b),$$

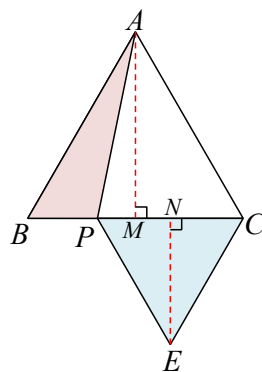
$$\therefore \triangle EPC \text{ 等边三角形, } \therefore NE = \frac{\sqrt{3}}{2}PE = \frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

$$\therefore \triangle EPC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}b \times \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

$$\therefore \triangle ABP \text{ 的面积} = \triangle EPC \text{ 的面积, } \therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a(a + b) = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

$$\therefore a^2 + ab - b^2 = 0, \therefore a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b, \text{ 或 } a = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}b (\text{舍}),$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \therefore \frac{BP}{PC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \text{ 故答案为: } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



10. 如图所示,平面直角坐标系中,直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 分别交 y 轴、 x 轴于点 A 、 B ,点 C 、点 D 是 y 轴正半轴、 x 轴正半轴上的两个动点, $CD = 6$,以 CD 为直径在第一象限内作半圆,与线段 AB 交于点 E 、 F 两点,则 EF 的最大值为 4.8.

【解答】解:过 CD 的中点作 EF 的垂线与 AB 交于点 M , CD 交于点 G ,

连接 GF ,由 $EF = 2MF = 2\sqrt{GF^2 - MG^2}$ 可知,要使得 EF 最大,即要 MG 最小,

当直线过 O 点时, MG 最小,即 EF 的值最大;

(点 O 到 AB 的距离是定值, OG 是定值,即当 O, G, M 三点共线时 MG 最小)

当 $x = 0$ 时, $y = 8$,当 $y = 0$ 时, $x = 6$,

$\therefore A(6, 0), B(0, 8), \therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 10$,

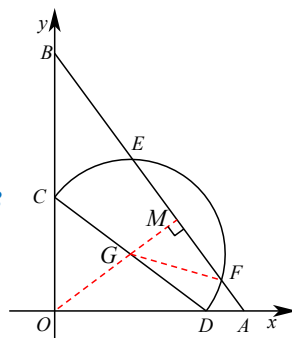
$\therefore \sin \angle OAB = \frac{OB}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{OM}{OA}, \therefore OM = 4.8$ (其实不是 OM ,应该是 O 到 AB

的距离,但,图画得太接近了,所以没办法找第二个点了,姑且就是 M 吧,理解就好),

$\therefore CD = 6, \therefore OG = GF = \frac{1}{2}CD = 3$,

$\therefore GM = OM - OG = 1.8, \therefore FM = \sqrt{GF^2 - GM^2} = 2.4$,

$\therefore EF = 2FM = 4.8$. 故答案为: 4.8.



11. “筒车”是一种以水流作动力,取水灌田的工具,据史料记载,它发明于隋而盛于唐,距今已有 1000 多年的历史,是我国古代劳动人民的一项伟大创造.

如图 2,“筒车”盛水筒的运行轨迹是以轴心 O 为圆心的圆,已知圆心 O 在水面上方,且当圆被水面截得的弦 AB 为 6 米时,水面下盛水筒的最大深度为 1 米 (即水面下方圆上部分一点距离水面的最大距离).

(1) 求该圆的半径;

(2) 若水面上涨导致圆被水面截得的弦 AB 从原来的 6 米变为 8 米时,则水面上涨的高度为多少米?

【解答】解: (1) 如图,过点 O 作 $OD \perp AB$,垂足为点 C ,交 $\odot O$ 以点 D ,

由题意可知, $CD = 1m, AB = 6m$,

$\therefore OC \perp AB, AB = 6m, \therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = 3m$,

设圆的半径为 $r m$,即 $OA = OD = r m, OC = (r - 1)m$,

在 $Rt\triangle AOC$ 中, $OC^2 + AC^2 = OA^2$,即 $(r - 1)^2 + 3^2 = r^2$,

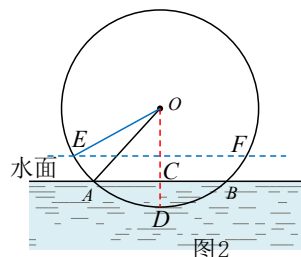
解得 $r = 5$,即该圆的半径为 $5m$;

(2) 设水面升到如图 EF 的位置,则 $EF \parallel AB$, OD 与 EF 相交于点 G ,

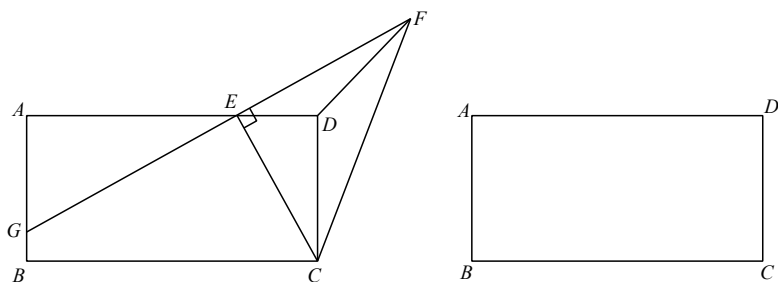
$\therefore OD \perp EF, \therefore EG = FG = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2} \times 8 = 4m$,

连接 OE ,在 $Rt\triangle EOG$ 中, $OE = 5m, EG = 4m$,

$\therefore OG = \sqrt{OE^2 - EG^2} = 3m, \therefore CG = OC - OG = 4 - 3 = 1(m)$,即水面上涨的高度为 1 米.



12. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4cm, AD = 8cm$,动点 E 在 AD 边上以每秒 $1cm$ 的速度由点 D 向点 A 运动,设动点 E 运动的时间为 $t(s)$,连接 CE ,过点 E 作 $GE \perp CE$ 交 AB 边于点 G ,延长 GE 至点 F ,使得 $FE = \frac{6}{5}CE$,连接 CF, DF . (1) 当点 E 由点 D 运动到点 A 时,点 G 运动的路程为 8 cm ; (2) 设 $\triangle FDE$ 的面积为 $S_1(cm^2)$, $\triangle FDC$ 的面积为 $S_2(cm^2)$,求 S_1, S_2 与 t 的函数表达式,并写出自变量 t 的取值范围; (3) 当 FD 所在直线经过 CE 中点时,求 t 的值.



【解答】解：(1) \because 四边形 $ABCD$ 为矩形，
 $\therefore \angle A = \angle ADC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle AGE + \angle AEG = 90^\circ$ ，
 $\because CE \perp GE$ ， $\therefore \angle DEC + \angle AEG = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle AGE = \angle DEC$ ， $\therefore \triangle AGE \sim \triangle DEC$ ，
 $\therefore \frac{AG}{DE} = \frac{AE}{CD}$ ，即 $\frac{AG}{DE} = \frac{8-DE}{4}$ ，

$$\text{解得，} AG = \frac{8DE - DE^2}{4} = -\frac{1}{4}(DE - 4)^2 + 4，$$

\therefore 当 $DE = 4$ 时， AG 有最大值 4，

\therefore 点 G 运动的路程为：4 + 4 = 8(cm)，故答案为：8；

(2) 如图 1，过点 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于 H ， $FI \perp CD$ 交 CD 的延长线于 I ，

$\because \angle CED + \angle FEH = 90^\circ$ ， $\angle EFH + \angle FEH = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CED = \angle EFH$ ，

$\because \angle CDE = \angle EHF = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle CDE \sim \triangle EHF$ ，

$$\therefore \frac{CD}{EH} = \frac{DE}{FH} = \frac{CE}{EF} = \frac{5}{6}，\text{即 } \frac{4}{EH} = \frac{t}{FH} = \frac{5}{6}，$$

$$\text{解得，} EH = \frac{24}{5}(\text{cm})，FH = \frac{6}{5}t(\text{cm})，$$

$$\text{则 } FI = DH = \left| \frac{24}{5} - t \right|，$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \times DE \times FH = \frac{3}{5}t^2 (0 \leq t \leq 8)，$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times CD \times FI = \left| \frac{48}{5} - 2t \right| (0 \leq t \leq 8)；$$

(3) \because 点 M 是 CE 的中点，

$$\therefore S_{\triangle FME} = S_{\triangle FMC}，S_{\triangle DME} = S_{\triangle DMC}，$$

$$\therefore S_1 = S_2，\therefore \frac{3}{5}t^2 = \left| \frac{48}{5} - 2t \right|，$$

$$\text{解得，} t_1 = \frac{8}{3}，t_2 = -6(\text{不合题意，舍去})，$$

\therefore 当 FD 所在直线经过 CE 中点时， t 的值为 $\frac{8}{3}$ 。

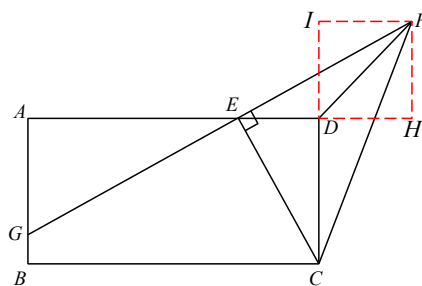


图1