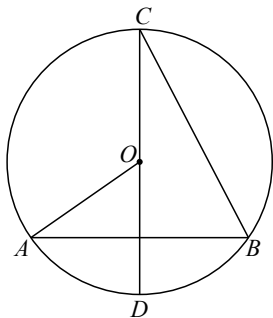


## 2024 秋季初三数学期中每日一题 003

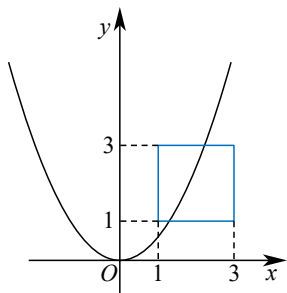
1. 已知  $A(-1, y_1)$ ,  $B(2, y_2)$ ,  $C(4, y_3)$  是二次函数  $y = ax^2 - 2ax + 1 (a < 0)$  的图象上的三个点, 则  $y_1, y_2, y_3$  的大小关系为 ( )

A.  $y_1 < y_2 < y_3$       B.  $y_2 < y_1 < y_3$       C.  $y_1 < y_3 < y_2$       D.  $y_3 < y_1 < y_2$

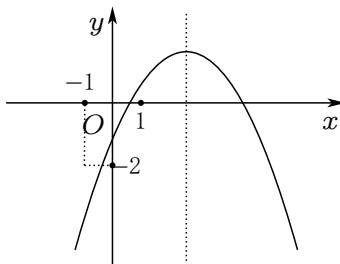
2. 如图,  $CD$  是  $\odot O$  的直径,  $AB$  是  $\odot O$  的弦,  $CD \perp AB$ ,  $\angle AOC = 150^\circ$ , 则  $\angle DCB =$  \_\_\_\_.



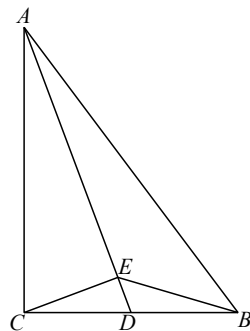
第2题图



第5题图



第7题图



第8题图

3. 已知二次函数  $y = x^2 + (2m - 1)x$ , 当  $-2 < x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_.

4. 若抛物线  $y = -4x^2$  不动, 将平面直角坐标系的  $x$  轴、 $y$  轴分别向上平移 1 个单位长度、向右平移 2 个单位长度, 则在新坐标系中此抛物线对应的函数解析式为 \_\_\_\_.

5. 如图, 正方形的四个顶点坐标分别为  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 3)$ . 若抛物线  $y = ax^2$  与正方形有两个公共点, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_.

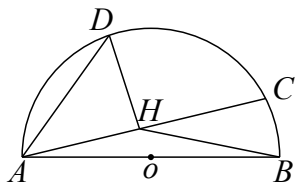
6. 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x - 1 = p$  ( $p$  为常数) 有两个不相等的正根, 则  $p$  的取值范围是 \_\_\_\_.

7. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示, 则下列结论: ①  $a - b + c < 0$ ; ②  $2a + b < 0$ ; ③  $b < 1$ ; ④  $a + c + 1 > 0$ ; ⑤  $\frac{a+b+c}{b-a} < 3$ . 其中正确的结论有 \_\_\_\_ (填写对应序号).

8. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $D$  是  $BC$  的中点,  $CE \perp AD$ , 垂足为  $E$ , 连接  $BE$ . 若  $\tan \angle CAD = \frac{3}{8}$ , 则  $\sin \angle BED =$  \_\_\_\_.

9. 如图,  $AB$  是半圆  $O$  的直径, 点  $D$  在半圆  $O$  上,  $AB = 2\sqrt{61}$ ,  $AD = 10$ ,  $C$  是弧  $BD$  上的一个动点, 连接  $AC$ , 过  $D$  点作  $DH \perp AC$  于  $H$ , 连接  $BH$ , 在点  $C$  移动的过程中,  $BH$  的最小值是 ( )

A. 5      B. 6      C. 7      D. 8



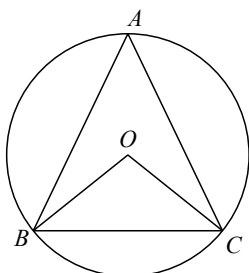
10. 二次函数  $y = ax^2 + bx + 2$  ( $a, b$  为常数) 的图象的顶点在第二象限, 且经过点  $(1, 0)$ , 则  $m = a - b + 2$  的变化范围是 ( )

A.  $0 < m < 2$       B.  $-3 < m < 2$       C.  $2 < m < 4$       D.  $0 < m < 4$

11. 如图,在  $\odot O$  中,  $AB = AC$ .

(1) 若  $\angle BOC = 100^\circ$ , 则  $\widehat{AB}$  的度数为 \_\_\_\_\_  $^\circ$ ;

(2) 若  $AB = 13$ ,  $BC = 10$ , 求  $\odot O$  的半径.



12. 掷实心球是苏州市高中阶段学校招生体育考试的选考项目. 如图 1, 一名女生投掷实心球, 实心球行进路线是一条抛物线, 行进高度  $y(m)$  与水平距离  $x(m)$  之间的函数关系如图 2 所示, 已知掷出时起点处高度为  $\frac{5}{3}m$ , 当水平距离为  $3m$  时, 实心球行进至最高点  $3m$  处.

(1) 求  $y$  关于  $x$  的函数表达式;

(2) 根据南京市高中阶段学校招生体育考试评分标准 (女生), 投掷过程中, 实心球从起点到落地点的水平距离大于等于  $6.9m$ , 此项考试得分为满分. 该女生在此项考试中是否得满分, 请说明理由.



图1

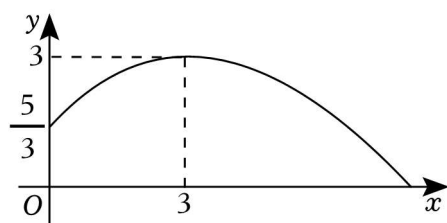


图2

13. 已知二次函数  $h = x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m$  ( $m$  是常数)

(1) 证明: 不论  $m$  取何值时, 该二次函数图象总与  $x$  轴有两个交点.

(2) 若  $A(n - 3, n^2 + 2)$ 、 $B(-n + 1, n^2 + 2)$  是该二次函数图象上的两个不同点, 求二次函数解析式和  $m$  的值;

(3) 若  $M(m + 2, s)$ ,  $N(x_0, t)$  在函数图象上, 且  $s > t$ , 求  $x_0$  的取值范围 (用含  $m$  的式子表示).

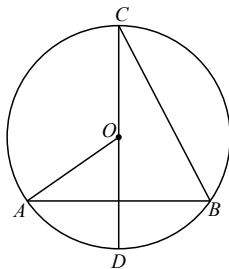
1. 已知  $A(-1, y_1)$ ,  $B(2, y_2)$ ,  $C(4, y_3)$  是二次函数  $y = ax^2 - 2ax + 1 (a < 0)$  的图象上的三个点, 则  $y_1, y_2, y_3$  的大小关系为 ( )

A.  $y_1 < y_2 < y_3$       B.  $y_2 < y_1 < y_3$       C.  $y_1 < y_3 < y_2$       D.  $y_3 < y_1 < y_2$

【解答】解: 二次函数  $y = ax^2 - 2ax + 1$  的对称轴为直线  $x = \frac{2a}{2a} = 1$ ,  $\because a < 0$ ,  $\therefore$  抛物线开口向下,  
 $\therefore$  点  $A, B, C$  到对称轴的距离分别为 2、1、3,  $\therefore y_3 < y_1 < y_2$ . 故选: D.

2. 如图,  $CD$  是  $\odot O$  的直径,  $AB$  是  $\odot O$  的弦,  $CD \perp AB$ ,  $\angle AOC = 150^\circ$ , 则  $\angle DCB =$  15°.

【解答】解:  $\because \angle B = \frac{1}{2} \angle AOC$ ,  $\angle AOC = 150^\circ$ ,  $\therefore \angle B = 75^\circ$ ,  
 $\because CD \perp AB$ ,  $\therefore \angle C = 90^\circ - \angle B = 15^\circ$ .  
 故答案为:  $15^\circ$ .



3. 已知二次函数  $y = x^2 + (2m-1)x$ , 当  $-2 < x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则  $m$  的取值范围是  $m \leq \frac{1}{2}$ .

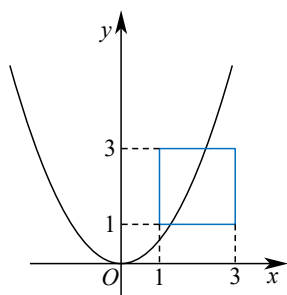
【解答】解: 二次函数  $y = x^2 + (2m-1)x$  的对称轴是直线  $x = -\frac{2m-1}{2 \times 1} = -\frac{2m-1}{2}$ ,  
 $\because$  二次函数  $y = x^2 + (2m-1)x$  中  $a = 1 > 0$ ,  $\therefore$  函数的图象的开口向上,  
 $\therefore$  当  $x < -\frac{2m-1}{2}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,  
 $\therefore$  当  $-2 < x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,  $\therefore -\frac{2m-1}{2} \geq 0$ , 解得:  $m \leq \frac{1}{2}$ , 故答案为:  $m \leq \frac{1}{2}$ .

4. 若抛物线  $y = -4x^2$  不动, 将平面直角坐标系的  $x$  轴、 $y$  轴分别向上平移 1 个单位长度、向右平移 2 个单位长度, 则在新坐标系中此抛物线对应的函数解析式为  $y = -4(x+2)^2 - 1$ .

【解答】解: 抛物线  $y = -4x^2$  的顶点坐标为  $(0, 0)$ ,  
 $\because x$  轴、 $y$  轴分别向上平移 1 个单位长度、向右平移 2 个单位长度,  
 $\therefore$  新平面直角坐标系中抛物线的顶点坐标为  $(-2, -1)$ ,  
 $\therefore$  新坐标系下抛物线的解析式是  $y = -4(x+2)^2 - 1$ . 故答案为:  $y = -4(x+2)^2 - 1$ .

5. 如图, 正方形的四个顶点坐标分别为  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 3)$ . 若抛物线  $y = ax^2$  与正方形有两个公共点, 则  $a$  的取值范围是  $\frac{1}{9} < a < 3$ .

【解答】解: 将正方形左上顶点坐标  $(1, 3)$  代入  $y = ax^2$  得:  $a = 3$ ,  
 将正方形右下顶点坐标  $(3, 1)$  代入  $y = ax^2$  得:  
 $9a = 1$ , 解得  $a = \frac{1}{9}$ ,  $\therefore \frac{1}{9} < a < 3$ , 故答案为:  $\frac{1}{9} < a < 3$ ,



6. 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x - 1 = p$  ( $p$  为常数) 有两个不相等的正根, 则  $p$  的取值范围是  $-2 < p < -1$ .

【解答】解:  $\because x^2 - 2x - 1 = p$ ,  $\therefore x^2 - 2x - 1 - p = 0$ ,  
 $\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2x - 1 - p = 0$  有两个不相等的正根,  
 $\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-p-1) > 0$ , 且  $-1-p > 0$ ,  
 解得:  $-2 < p < -1$ . 故答案为:  $-2 < p < -1$ .

7. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示, 则下列结论: ①  $a - b + c < 0$ ; ②  $2a + b < 0$ ; ③  $b < 1$ ; ④  $a + c + 1 > 0$ ; ⑤  $\frac{a+b+c}{b-a} < 3$ . 其中正确的结论有 ①④⑤ (填写对应序号).

【解答】解: 由所给函数图象可知, 当  $x = -1$  时, 函数值小于零,

所以  $a - b + c < 0$ . 故①正确.

抛物线的对称轴在直线  $x = 1$  的右侧, 所以  $-\frac{b}{2a} > 1$ ,

又因为抛物线开口向下, 即  $a < 0$ , 所以  $2a + b > 0$ . 故②错误.

将点  $(-1, 2)$  代入函数解析式得,  $a - b + c = -2$ , 即  $a = b - c - 2$ .

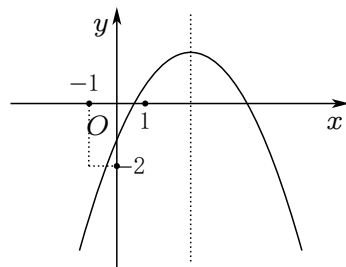
又因为当  $x = 1$  时, 函数值大于零, 所以  $a + b + c > 0$ ,

则  $b - c - 2 + b + c > 0$ , 即  $b > 1$ . 故③错误.

因为  $a - b + c = -2$ , 所以  $a + c = b - 2 > 1 - 2 = -1$ , 即  $a + c + 1 > 0$ . 故④正确.

因为  $-\frac{b}{2a} > 0$ , 且  $a < 0$ , 所以  $b > 0$ , 则  $b - a > 0$ . 又因为当  $x = -2$  时, 函数值小于零,

则  $4a - 2b + c < 0$ ,  $a + b + c + 3(a - b) < 0$ , 所以  $\frac{a + b + c}{b - a} < 3$ . 故⑤正确. 故答案为: ①④⑤.



8. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $D$  是  $BC$  的中点,  $CE \perp AD$ , 垂足为  $E$ , 连接  $BE$ . 若  $\tan \angle CAD = \frac{3}{8}$ , 则  $\sin \angle BED = \underline{\frac{4}{5}}$ .

【解答】解:  $\because CE \perp AD$ ,  $\therefore \angle CED = \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\because \angle CDE = \angle ADC$ ,  $\therefore \triangle CDE \sim \triangle ADC$ ,  $\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{DE}{CD}$ ,  $\therefore CD^2 = DE \cdot AD$ ,

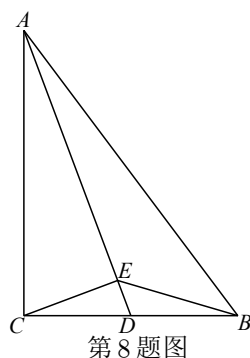
$\because D$  是  $BC$  的中点,  $\therefore BD = CD$ ,  $\therefore BD^2 = DE \cdot AD$ ,  $\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{BD}$ ,

又  $\because \angle ADB = \angle BDE$ ,  $\therefore \triangle BDE \sim \triangle ADB$ ,  $\therefore \angle BED = \angle ABC$ ,

$\because \tan \angle CAD = \frac{3}{8}$ ,  $\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{3}{8}$ ,  $\because D$  是  $BC$  的中点,  $\therefore CB = 2CD$ ,  $\therefore \frac{CB}{AC} = \frac{3}{4}$ ,

设  $AC = 4x$ , 则  $CB = 3x$ ,  $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5x$ ,  $\therefore \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$ ,

$\therefore \sin \angle BED = \frac{4}{5}$ . 故答案为:  $\frac{4}{5}$ .



9. 如图,  $AB$  是半圆  $O$  的直径, 点  $D$  在半圆  $O$  上,  $AB = 2\sqrt{61}$ ,  $AD = 10$ ,  $C$  是弧  $BD$  上的一个动点, 连接  $AC$ , 过  $D$  点作  $DH \perp AC$  于  $H$ , 连接  $BH$ , 在点  $C$  移动的过程中,  $BH$  的最小值是 ( )

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【解答】解: 如图, 取  $AD$  的中点  $M$ , 连接  $BD$ ,  $HM$ ,  $BM$ .

$\because DH \perp AC$ ,

$\therefore \angle AHD = 90^\circ$ ,

$\therefore$  点  $H$  在以  $M$  为圆心,  $MD$  为半径的  $\odot M$  上,

$\therefore$  当  $M$ 、 $H$ 、 $B$  共线时,  $BH$  的值最小,

$\because AB$  是直径,

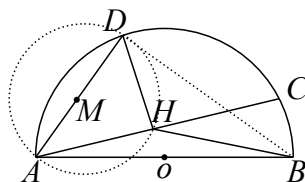
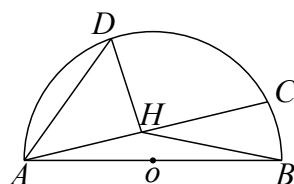
$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ,

$\therefore BD = \sqrt{(2\sqrt{61})^2 - 10^2} = 12$ ,

$BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ,

$\therefore BH$  的最小值为  $BM - MH = 13 - 5 = 8$ .

故选: D.



【点评】本题考查点与圆的位置关系、勾股定理、圆周角定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 利用辅助线圆解决问题, 属于中考选择题中的压轴题.

10. 二次函数  $y = ax^2 + bx + 2$  ( $a, b$  为常数) 的图象的顶点在第二象限, 且经过点  $(1, 0)$ , 则  $m = a - b + 2$  的变化范围是 ( )

A.  $0 < m < 2$

B.  $-3 < m < 2$

C.  $2 < m < 4$

D.  $0 < m < 4$

【解答】解:  $\because$  二次函数  $y = ax^2 + bx + 2$  的图象的顶点在第二象限, 且经过点  $(1, 0)$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} < 0, a + b + 2 = 0, \therefore \frac{b}{2a} > 0, \therefore a, b \text{ 同号},$$

$$\therefore a + b = -2, \therefore a < 0, b < 0, \therefore -b > 0,$$

$$\therefore a + b = -2, \therefore a = -b - 2, \therefore m = a - b + 2 = -b - 2 - b + 2 = -2, \therefore b = -\frac{m}{2},$$

$$\therefore b < 0, \therefore -\frac{m}{2} < 0, \therefore m > 0, \therefore a + b = -2, \therefore b = -2 - a,$$

$$\therefore m = a - b + 2 = a - (-2 - a) + 2 = 2a + 4, \therefore a = \frac{m-4}{2},$$

$$\therefore a < 0, \therefore \frac{m-4}{2} < 0, \therefore m < 4, \therefore 0 < m < 4, \text{ 故选: } D.$$

11. 如图, 在  $\odot O$  中,  $AB = AC$ .

(1) 若  $\angle BOC = 100^\circ$ , 则  $\widehat{AB}$  的度数为 130  $^\circ$ ;

(2) 若  $AB = 13, BC = 10$ , 求  $\odot O$  的半径.

【解答】解: (1)  $\because$  在  $\odot O$  中,  $\angle BOC = 100^\circ$ ,  $\therefore \angle BAC = 50^\circ$ ,

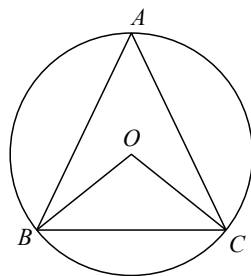
$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}, \therefore AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle ACB = 65^\circ, \therefore \widehat{AB} = 130^\circ,$$

(2) 连接  $AO$ , 延长  $AO$  交  $BC$  于  $D$ , 则  $AD \perp BC, BD = CD = \frac{1}{2}BC = 5$ ,

$$\therefore \text{在直角 } \triangle ABD \text{ 中, 由勾股定理, 得 } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12;$$

$$\text{在直角 } \triangle OBD \text{ 中, 由勾股定理, 得 } OB^2 = (12 - OB)^2 + 5^2,$$

$$\text{解得 } OB = \frac{169}{24}, \text{ 即 } \odot O \text{ 的半径是 } \frac{169}{24}.$$



12. 掷实心球是苏州市高中阶段学校招生体育考试的选考项目. 如图1, 一名女生投掷实心球, 实心球行进路线是一条抛物线, 行进高度  $y(m)$  与水平距离  $x(m)$  之间的函数关系如图2所示, 已知掷出时起点处高度为  $\frac{5}{3}m$ , 当水平距离为  $3m$  时, 实心球行进至最高点  $3m$  处.

(1) 求  $y$  关于  $x$  的函数表达式;

(2) 根据南京市高中阶段学校招生体育考试评分标准 (女生), 投掷过程中, 实心球从起点到落地点的水平距离大于等于  $6.9m$ , 此项考试得分为满分. 该女生在此项考试中是否得满分, 请说明理由.

【解答】解: (1)  $\because$  当水平距离为  $3m$  时, 实心球行进至最高点  $3m$  处,

$$\therefore \text{设 } y = a(x - 3)^2 + 3,$$

$$\therefore y = a(x - 3)^2 + 3 \text{ 经过点 } (0, \frac{5}{3}),$$

$$\therefore \frac{5}{3} = a(0 - 3)^2 + 3, \text{ 解得: } a = -\frac{4}{27},$$

$$\therefore y = -\frac{4}{27}(x - 3)^2 + 3 = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3},$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3};$$



图1

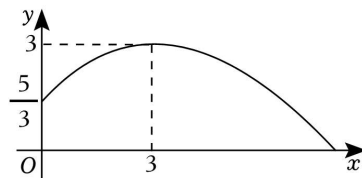


图2

(2) 该女生在此项考试中是得满分, 理由如下:

$$\therefore \text{对于二次函数 } y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3}, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, 有 } -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3} = 0,$$

$$\therefore 4x^2 - 24x - 45 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{15}{2}, x_2 = -\frac{3}{2} (\text{舍去}), \therefore \frac{15}{2} > 6.9, \therefore \text{该女生在此项考试中是得满分.}$$

13. 已知二次函数  $h = x^2 - (2m-1)x + m^2 - m$  ( $m$  是常数)

(1) 证明: 不论  $m$  取何值时, 该二次函数图象总与  $x$  轴有两个交点.

(2) 若  $A(n-3, n^2+2)$ 、 $B(-n+1, n^2+2)$  是该二次函数图象上的两个不同点, 求二次函数解析式和  $m$  的值;

(3) 若  $M(m+2, s)$ 、 $N(x_0, t)$  在函数图象上, 且  $s > t$ , 求  $x_0$  的取值范围 (用含  $m$  的式子表示).

【解答】解: (1) 由题意得:  $\Delta = [-(2m-1)]^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - m) = 1 > 0$ ,

$\therefore$  不论  $m$  取何值时, 该二次函数图象总与  $x$  轴有两个交点;

(2)  $\because A(n-3, n^2+2)$ 、 $B(-n+1, n^2+2)$  是该二次函数图象上的两个不同点,

$\therefore$  抛物线的对称轴是:  $x = \frac{n-3-n+1}{2} = -1$ ,  $\therefore -\frac{-2m+1}{2 \times 1} = -1$ ,  $m = -\frac{1}{2}$ ,

$\therefore$  二次函数解析式为:  $h = x^2 + 2x + \frac{3}{4}$ ;

(3) 当  $h = 0$  时,  $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m = 0$ , 解得:  $x_1 = m-1$ ,  $x_2 = m$ ,

如图所示, 由图象得:  $x_0$  的取值范围是  $m-3 < x_0 < m+2$ .

