

2024 春季初三数学每日一题打卡 025

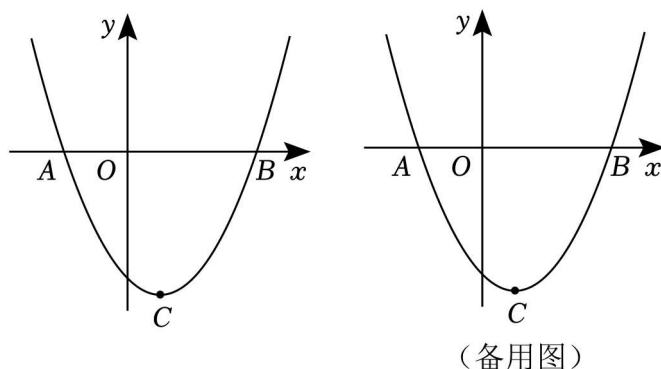
试题来源:2023 常州中考

如图,二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 4$ 的图象与 x 轴相交于点 $A(-2,0)$, B ,其顶点是 C .

(1) $b =$ _____;

(2) D 是第三象限抛物线上的一点,连接 OD , $\tan \angle AOD = \frac{5}{2}$. 将原抛物线向左平移,使得平移后的抛物线经过点 D ,过点 $(k,0)$ 作 x 轴的垂线 l . 已知在 l 的左侧,平移前后的两条抛物线都下降,求 k 的取值范围;

(3) 将原抛物线平移,平移后的抛物线与原抛物线的对称轴相交于点 Q ,且其顶点 P 落在原抛物线上,连接 PC 、 QC 、 PQ . 已知 $\triangle PCQ$ 是直角三角形,求点 P 的坐标.



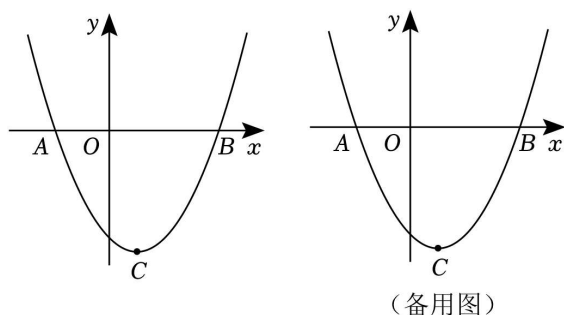
试题解析:

如图,二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 4$ 的图象与 x 轴相交于点 $A(-2,0)$, B , 其顶点是 C .

(1) $b =$ _____;

(2) D 是第三象限抛物线上的一点, 连接 OD , $\tan \angle AOD = \frac{5}{2}$. 将原抛物线向左平移, 使得平移后的抛物线经过点 D , 过点 $(k,0)$ 作 x 轴的垂线 l . 已知在 l 的左侧, 平移前后的两条抛物线都下降, 求 k 的取值范围;

(3) 将原抛物线平移, 平移后的抛物线与原抛物线的对称轴相交于点 Q , 且其顶点 P 落在原抛物线上, 连接 PC 、 QC 、 PQ . 已知 $\triangle PCQ$ 是直角三角形, 求点 P 的坐标.



【分析】(1) 将 $A(-2,0)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 4$ 即可求得 b ;

(2) 设 $D(2t, 5t)$, 从而得出 $\frac{1}{2} \times (2t)^2 - 2t - 4 = 5t$, 求得 t 的值, 从而求得点 D 坐标, 设新抛物线设为: $y = \frac{1}{2}(x - m)^2 - \frac{9}{2}$, 将点 D 坐标代入求得 m 的值, 进一步得出结果; (3) 作 $PV \perp CQ$ 于 V , 设 $P(t, \frac{1}{2}t^2 - t - 4)$, 从而得出平移后的抛物线为: $y = \frac{1}{2}(x - t)^2 + (\frac{1}{2}t^2 - t - 4)$, 进而表示出 Q 的坐标, 计算出 $CV = QV$, 从而得出 $PV = CV = QV$, 由此列出 $|t - 1| = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$, 求得 t 的值, 进一步得出结果.

【解答】解: (1) 由题意得, $\frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2b - 4 = 0$, $\therefore b = -1$;

(2) $\because \tan \angle AOD = \frac{5}{2}$, \therefore 设 $D(2t, 5t)$,

$\therefore \frac{1}{2} \times (2t)^2 - 2t - 4 = 5t$, $\therefore t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 4$ (舍去), $\therefore D(-1, -\frac{5}{2})$,

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2}$, \therefore 新抛物线设为: $y = \frac{1}{2}(x - m)^2 - \frac{9}{2}$,

$\therefore -\frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times (m + 1)^2 - \frac{9}{2}$, $\therefore m_1 = -3$, $m_2 = 1$ (舍去),

$\therefore y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - \frac{9}{2}$,

\therefore 在 l 的左侧, 平移前后的两条抛物线都下降, $\therefore k \leq -3$;

(3) 如图,

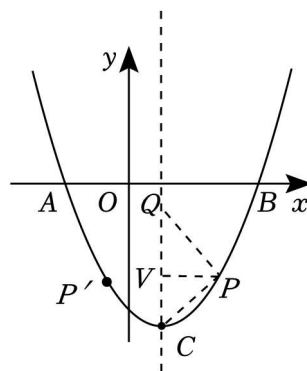
作 $PV \perp CQ$ 于 V , 设 $P(t, \frac{1}{2}t^2 - t - 4)$, \therefore 平移后的抛物线为: $y = \frac{1}{2}(x - t)^2 + (\frac{1}{2}t^2 - t - 4)$,

当 $x = 1$ 时, $y = t^2 - 2t - \frac{7}{2}$, $\therefore Q(1, t^2 - 2t - \frac{7}{2})$,

$\therefore \frac{1}{2} > 0$, $\therefore \angle CPQ = 90^\circ$,

$\therefore QV = (t^2 - 2t - \frac{7}{2}) - (\frac{1}{2}t^2 - t - 4) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$,

$CV = (\frac{1}{2}t^2 - t - 4) - (-\frac{9}{2}) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$,



$$\therefore QV = CV, \therefore PV = CV = QV,$$

$$\therefore |t-1| = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2},$$

$$\therefore t_1 = 3, t_2 = -1, t_3 = t_4 = 1 (\text{舍去}),$$

$$\text{当 } t = 3 \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times 3^2 - 3 - 4 = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(3, -\frac{5}{2}\right) \text{ 或 } \left(-1, -\frac{5}{2}\right).$$

【点评】本题考查了二次函数及其图象的性质,平移的性质,等腰的性质,直角三角形的性质,解一元二次方程等知识,解决问题的关键是较强的计算能力.