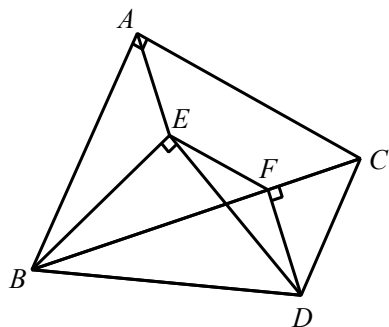


2024 春季初三数学每日一题打卡 016

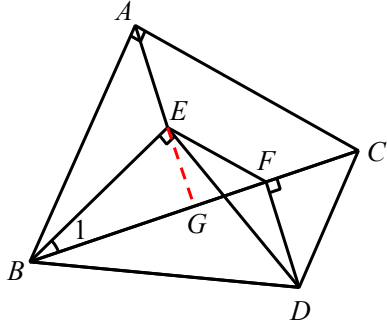
试题来源：2023 星海二模

如图，等腰 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 是 $\triangle ABC$ 外一点，分别以 BD ， CD 为斜边作两个等腰直角 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ ，并使点 F 落在 BC 上，点 E 落在 $\triangle ABC$ 的内部，连结 EF ．若 $\tan \angle FDB = \frac{5}{2}$ ，则 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DEF$ 的面积之比为 _____．



试题解析：

如图，等腰 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 是 $\triangle ABC$ 外一点，分别以 BD ， CD 为斜边作两个等腰直角 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ ，并使点 F 落在 BC 上，点 E 落在 $\triangle ABC$ 的内部，连结 EF 。若 $\tan \angle FDB = \frac{5}{2}$ ，则 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DEF$ 的面积之比为 $\frac{7}{3}$ 。



延长 AE 交 BC 于点 G

$$\because \text{在 } Rt\triangle BDF \text{ 中, } \tan \angle BDF = \frac{BF}{DF} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{设 } BF = 5a, DF = 2a,$$

$\because \triangle CDF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CF = DF = 2a, CD = 2\sqrt{2}a,$$

$\because \triangle ABC, \triangle BDE$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle EBD = 45^\circ, \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{BA} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle ABC - \angle 1 = \angle EBD - \angle 1$$

$$\text{即 } \angle DBC = \angle EBA,$$

$$\therefore \triangle BDC \sim \triangle EBA,$$

$$\therefore \frac{CD}{AE} = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}, \angle BCD = \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = 2a,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE = 45^\circ,$$

即 AE 平分 $\angle BAC$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AG \perp BC, BG = CG = \frac{7}{2}a,$$

$$\therefore FG = CG - CF = \frac{3}{2}a,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BG = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{7}{2}a = \frac{7}{2}a^2,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot FG = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}a^2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{7}{2}a^2}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{7}{3}.$$