

2024 春季初三数学每日一题打卡 008

试题来源:2023.无锡二模

已知在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 9$, $AB = 12$, O 为矩形的中心; 在 $Rt\triangle AEF$ 中, $\angle EAF = 90^\circ$, $AE = 6$, $AF = 8$. 将 $\triangle AEF$ 绕点 A 按顺时针方向旋转一周.

- (1) 当直角边 AE , AF 分别在 AD , AB 边上时, 连接 OE , OF , 求 $\triangle OEF$ 的面积;
- (2) 设斜边 EF 与矩形 $ABCD$ 的交点为 G , 当 O , E , F 三点在一条直线上时, 求 $\frac{OG}{AG}$ 的值;
- (3) 连接 CE , 取 CE 中点 M , 连接 FM , 求 FM 的取值范围.

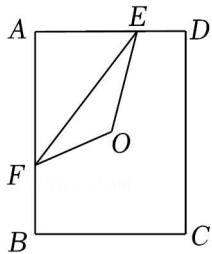


图1

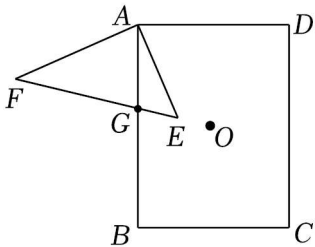
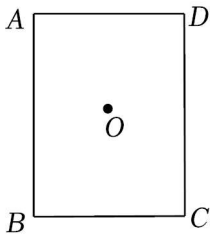
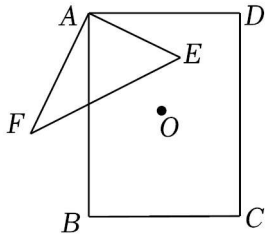


图2



备用图1



备用图2

试题解析:

(1) 当直角边 AE, AF 分别在 AD, AB 边上时, 连接 OE, OF , 求 $\triangle OEF$ 的面积;

(2) 设斜边 EF 与矩形 $ABCD$ 的交点为 G , 当 O, E, F 三点在一条直线上时, 求 $\frac{OG}{AG}$ 的值;

(3) 连接 CE , 取 CE 中点 M , 连接 FM , 求 FM 的取值范围.

【分析】(1) 连接 OA , 作 $OG \perp AB$ 于 G , $OH \perp AD$ 于 H ,

由 $S_{\triangle OEF} = (S_{\triangle AOF} + S_{\triangle AOE}) - S_{\triangle AEF}$ 可求出结果;

(2) 作 $OM \perp AB$ 于 M , $AN \perp FG$ 于 N , 证明 $\triangle ANG \sim \triangle OMG$, 进而求得结果;

(3) 延长 EF 至 N , 使 $FN = EF = 10$, 连接 NC, AN , 作 $AG \perp EF$ 于 G , 因为 $FM = \frac{1}{2}CN$, 故只需求 CN 的最值, 可求得 AN , 所以点 N 在以 A 为圆心, AN 为半径的圆上运动, 进而求得 FM 的范围.

【解答】解: (1) 如图 1, 连接 OA , 作 $OG \perp AB$ 于 G , $OH \perp AD$ 于 H ,

$$\because OG = \frac{1}{2}AD = \frac{9}{2}, OH = \frac{1}{2}AB = 6, AE = 6, AF = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2}AF \cdot OG = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{9}{2} = 18,$$

$$S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2}AE \cdot OH = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18,$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

$$\therefore S_{\triangle OEF} = (S_{\triangle AOF} + S_{\triangle AOE}) - S_{\triangle AEF} = 18 + 18 - 24 = 12;$$

(2) 如图 2, 作 $OM \perp AB$ 于 M , $AN \perp FG$ 于 N ,

$$\therefore \angle ANG = \angle OMG = 90^\circ,$$

$$\because \angle AGN = \angle OGM, \therefore \triangle ANG \sim \triangle OMG, \therefore \frac{OG}{AG} = \frac{OM}{AN},$$

$$\text{由 } S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}EF \cdot AN = 24 \text{ 得, } AN = \frac{48}{EF} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore \frac{OG}{AG} = \frac{9}{2} \div \frac{24}{5} = \frac{15}{16};$$

(3) 如图 3,

延长 EF 至 N , 使 $FN = EF = 10$, 连接 NC, AN , 作 $AG \perp EF$ 于 G ,

$$\text{由 (2) 得, } AG = \frac{24}{5},$$

$$EG = \sqrt{AE^2 - AG^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore NG = EN - EG = 20 - \frac{18}{5} = \frac{82}{5},$$

在 $Rt\triangle AGN$ 中, 由勾股定理得,

$$AN = \sqrt{AG^2 + NG^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{82}{5}\right)^2} = 2\sqrt{73},$$

\therefore 点 N 在以 A 为圆心, $2\sqrt{73}$ 为半径的圆上运动,

$$\therefore CN \text{ 最大值} = CP = AC + AP = 15 + 2\sqrt{73},$$

$$CN \text{ 的最小值} = CQ = AQ - AC = 2\sqrt{73} - 15,$$

$\therefore M$ 是 EC 的中点,

$$\therefore FM = \frac{1}{2}CN,$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{73} - 15}{2} \leq FM \leq \frac{15 + 2\sqrt{73}}{2}.$$

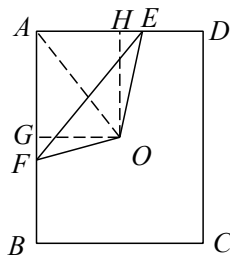


图 1

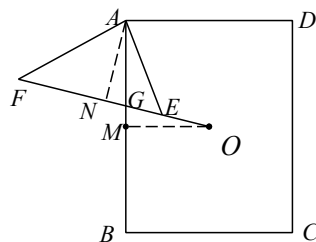


图 2

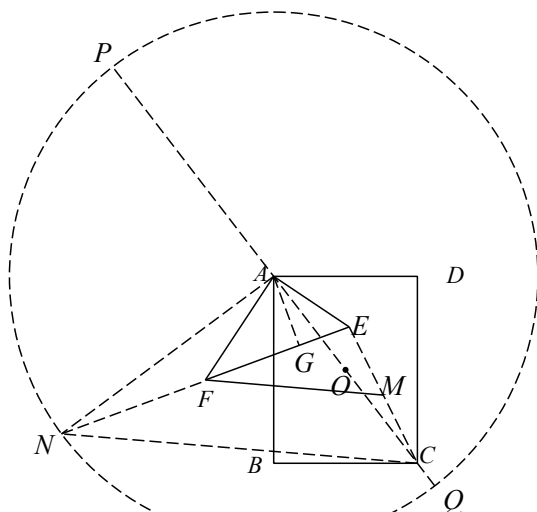


图 3

【点评】本题考查了矩形性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 确定圆的条件等知识, 解决问题的关键是转化条件, 作辅助线确定 N 的轨迹.