

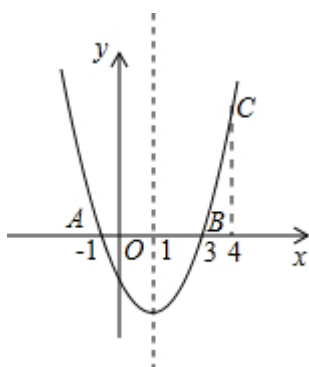
### 解析

1. 如图, 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的图象经过点  $A(-1, 0)$ 、点  $B(3, 0)$ 、点  $C(4, y_1)$ ,

若点  $D(x_2, y_2)$  是抛物线上任意一点, 有下列结论:

- ①二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的最小值为  $-4a$ ;
- ②若  $-1 \leq x_2 \leq 4$ , 则  $0 \leq y_2 \leq 5a$ ;
- ③若  $y_2 > y_1$ , 则  $x_2 > 4$ ;
- ④一元二次方程  $cx^2+bx+a=0$  的两个根为  $-1$  和  $\frac{1}{3}$

其中正确结论的个数是 ( )



- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

【解答】解: 抛物线解析式为  $y=a(x+1)(x-3)$ ,

$$\text{即 } y=ax^2-2ax-3a,$$

$$\because y=a(x-1)^2-4a,$$

$\therefore$  当  $x=1$  时, 二次函数有最小值  $-4a$ , 所以①正确;

$$\text{当 } x=4 \text{ 时, } y=a \times 5 \times 1=5a,$$

$\therefore$  当  $-1 \leq x_2 \leq 4$ , 则  $-4a \leq y_2 \leq 5a$ , 所以②错误;

$\because$  点  $C(4, 5a)$  关于直线  $x=1$  的对称点为  $(-2, 5a)$ ,

$\therefore$  当  $y_2 > y_1$ , 则  $x_2 > 4$  或  $x < -2$ , 所以③错误;

$$\because b=-2a, c=-3a,$$

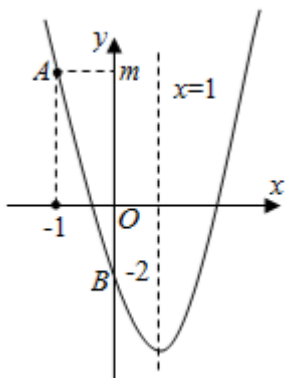
$$\therefore \text{方程 } cx^2+bx+a=0 \text{ 化为 } -3ax^2-2ax+a=0,$$

$$\text{整理得 } 3x^2+2x-1=0, \text{ 解得 } x_1=-1, x_2=\frac{1}{3}, \text{ 所以④正确.}$$

故选: B.

2. 如图, 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 的对称轴为直线  $x=1$ , 与  $y$  轴交于点  $B(0, -2)$ ,

点  $A(-1, m)$  在抛物线上, 则下列结论中错误的是 ( )



A.  $ab < 0$

B. 一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  的正实数根在 2 和 3 之间

C.  $a = \frac{m+2}{3}$

D. 点  $P_1(t, y_1)$ ,  $P_2(t+1, y_2)$  在抛物线上, 当实数  $t > \frac{1}{3}$  时,  $y_1 < y_2$

【解答】解:  $\because$  抛物线开口向上,

$\therefore a > 0$ ,

$\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = -\frac{b}{2a} = 1$ ,

$\therefore b = -2a < 0$ ,

$\therefore ab < 0$ , 所以 A 选项的结论正确;

$\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ , 抛物线与  $x$  轴的一个交点坐标在  $(0, 0)$  与  $(-1, 0)$  之间,

$\therefore$  抛物线与  $x$  轴的另一个交点坐标在  $(2, 0)$  与  $(3, 0)$  之间,

$\therefore$  一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  的正实数根在 2 和 3 之间, 所以 B 选项的结论正确;

把  $B(0, -2)$ ,  $A(-1, m)$  代入抛物线得  $c = -2$ ,  $a - b + c = m$ ,

而  $b = -2a$ ,

$\therefore a + 2a - 2 = m$ ,

$\therefore a = \frac{m+2}{3}$ , 所以 C 选项的结论正确;

$\because$  点  $P_1(t, y_1)$ ,  $P_2(t+1, y_2)$  在抛物线上,

$\therefore$  当点  $P_1$ 、 $P_2$  都在直线  $x = 1$  的右侧时,  $y_1 < y_2$ , 此时  $t \geq 1$ ;

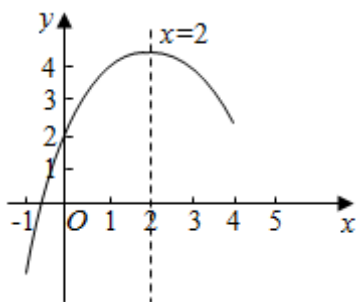
当点  $P_1$  在直线  $x = 1$  的左侧, 点  $P_2$  在直线  $x = 1$  的右侧时,  $y_1 < y_2$ , 此时  $0 < t < 1$  且  $t+1$

$-1 > 1 - t$ , 即  $\frac{1}{2} < t < 1$ ,

$\therefore$  当  $\frac{1}{2} < t$  时,  $y_1 < y_2$ , 所以  $D$  选项的结论错误.

故选:  $D$ .

3. 已知  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象如图所示, 对称轴为直线  $x = 2$ . 若  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的两个根, 且  $x_1 < x_2$ ,  $-1 < x_1 < 0$ , 则下列说法正确的是 ( )



- A.  $x_1 + x_2 < 0$       B.  $4 < x_2 < 5$       C.  $b^2 - 4ac < 0$       D.  $ab > 0$

【解答】解:  $\because x_1, x_2$  是一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根,

$\therefore x_1, x_2$  是抛物线与  $x$  轴交点的横坐标,

$\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 2$ ,

$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = 2$ , 即  $x_1 + x_2 = 4 > 0$ , 故选项  $A$  错误;

$\because x_1 < x_2$ ,  $-1 < x_1 < 0$ ,

$\therefore -1 < 4 - x_2 < 0$ ,

解得:  $4 < x_2 < 5$ , 故选项  $B$  正确;

$\because$  抛物线与  $x$  轴有两个交点,

$\therefore b^2 - 4ac > 0$ , 故选项  $C$  错误;

$\because$  抛物线开口向下,

$\therefore a < 0$ ,

$\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 2$ ,

$\therefore -\frac{b}{2a} = 2$ ,

$\therefore b = -4a > 0$ ,

$\therefore ab < 0$ , 故选项  $D$  错误;

故选:  $B$ .

4. 抛物线  $y = x^2 + bx + 3$  的对称轴为直线  $x = 1$ . 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + bx + 3 - t = 0$  ( $t$  为实数) 在  $-1 < x < 4$  的范围内有实数根, 则  $t$  的取值范围是 ( )

A.  $2 \leq t < 11$

B.  $t \geq 2$

C.  $6 < t < 11$

D.  $2 \leq t < 6$

【解答】解：∵  $y = x^2 + bx + 3$  的对称轴为直线  $x = 1$ ,

$$\therefore b = -2,$$

$$\therefore y = x^2 - 2x + 3,$$

∴ 一元二次方程  $x^2 + bx + 3 - t = 0$  的实数根可以看作  $y = x^2 - 2x + 3$  与函数  $y = t$  的图象有交点,

∵ 方程在  $-1 < x < 4$  的范围内有实数根,

当  $x = -1$  时,  $y = 6$ ;

当  $x = 4$  时,  $y = 11$ ;

函数  $y = x^2 - 2x + 3$  在  $x = 1$  时有最小值 2;

$$\therefore 2 \leq t < 11.$$

故选: A.

5. 已知二次函数  $y = 2x^2 - 8x + 6$  的图象交  $x$  轴于  $A, B$  两点. 若其图象上有且只有  $P_1, P_2,$

$P_3$  三点满足  $S_{\triangle ABP_1} = S_{\triangle ABP_2} = S_{\triangle ABP_3} = m$ , 则  $m$  的值是 ( )

A. 1

B.  $\frac{3}{2}$

C. 2

D. 4

【解答】解: ∵ 二次函数  $y = 2x^2 - 8x + 6$  的图象上有且只有  $P_1, P_2, P_3$  三点满足  $S_{\triangle ABP_1}$

$$= S_{\triangle ABP_2} = S_{\triangle ABP_3} = m,$$

∴ 三点中必有一点在二次函数  $y = 2x^2 - 8x + 6$  的顶点上,

$$\therefore y = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 2)^2 - 2 = 2(x - 1)(x - 3),$$

∴ 二次函数  $y = 2x^2 - 8x + 6$  的图象的顶点坐标为  $(2, -2)$ ,

令  $y = 0$ , 则  $2(x - 1)(x - 3) = 0$ ,

解得  $x = 1$  或  $x = 3$ ,

∴ 与  $x$  轴的交点为  $(1, 0), (3, 0)$ ,

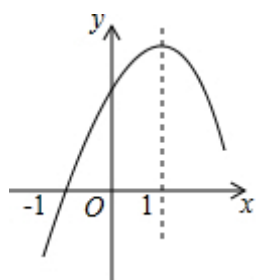
$$\therefore AB = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

故选: C.

6. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的部分图象如图所示, 图象过点  $(-1, 0)$ , 对称轴为直线  $x = 1$ , 下列结论: ①  $abc < 0$  ②  $b < c$  ③  $3a + c = 0$  ④ 当  $y > 0$  时,  $-1 < x < 3$  其中正确的结论

有 ( )



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【解答】解：①对称轴位于  $x$  轴的右侧，则  $a, b$  异号，即  $ab < 0$ .

抛物线与  $y$  轴交于正半轴，则  $c > 0$ .

$$\therefore abc < 0.$$

故①正确；

② $\because$  抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0.$$

$$\because \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a.$$

$$\because x = -1 \text{ 时, } y = 0,$$

$$\therefore a - b + c = 0,$$

$$\text{而 } b = -2a,$$

$$\therefore c = -3a,$$

$$\therefore b - c = -2a + 3a = a < 0,$$

$$\text{即 } b < c,$$

故②正确；

$$\text{③} \because x = -1 \text{ 时, } y = 0,$$

$$\therefore a - b + c = 0,$$

$$\text{而 } b = -2a,$$

$$\therefore c = -3a,$$

$$\therefore 3a + c = 0.$$

故③正确；

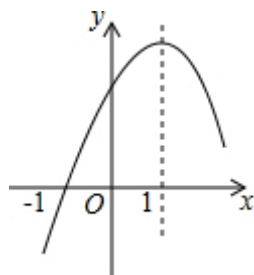
④由抛物线的对称性质得到：抛物线与  $x$  轴的另一交点坐标是  $(3, 0)$ .

$\therefore$  当  $y > 0$  时,  $-1 < x < 3$

故④正确.

综上所述, 正确的结论有 4 个.

故选:  $D$ .



7. 已知  $m > 0$ , 关于  $x$  的一元二次方程  $(x+1)(x-2) - m = 0$  的解为  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 则下列结论正确的是 ( )

A.  $x_1 < -1 < 2 < x_2$     B.  $-1 < x_1 < 2 < x_2$     C.  $-1 < x_1 < x_2 < 2$     D.  $x_1 < -1 < x_2 < 2$

【解答】解: 二次函数  $y = (x+1)(x-2)$  的图象如图所示:

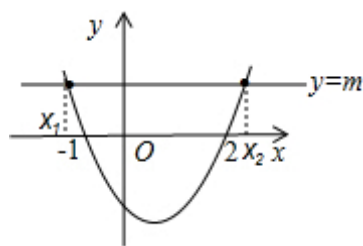
它与  $x$  轴的交点坐标为  $(-1, 0), (2, 0)$ ,

关于  $x$  的一元二次方程  $(x+1)(x-2) - m = 0$  的解为  $x_1, x_2$ , 可以看作是直线  $y = m$  ( $m > 0$ ) 与二次函数  $y = (x+1)(x-2)$  交点的横坐标,

由图象可知  $x_1 < -1, x_2 > 2$ ;

$\therefore x_1 < -1 < 2 < x_2$ ,

故选:  $A$ .



8. 关于二次函数  $y = ax^2 - 4ax - 5$  ( $a \neq 0$ ) 的三个结论: ①对任意实数  $m$ , 都有  $x_1 = 2+m$  与  $x_2 = 2-m$  对应的函数值相等; ②若  $3 \leq x \leq 4$ , 对应的  $y$  的整数值有 4 个, 则  $-\frac{4}{3} < a \leq -1$  或  $1 \leq a < \frac{4}{3}$ ; ③若抛物线与  $x$  轴交于不同两点  $A, B$ , 且  $AB \leq 6$ , 则  $a < -\frac{5}{4}$  或  $a \geq 1$ . 其中正确的结论是 ( )

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

【解答】解：∵二次函数  $y=ax^2-4ax-5$  的对称轴为直线  $x=-\frac{-4a}{2a}=2$ ,

∴  $x_1=2+m$  与  $x_2=2-m$  关于直线  $x=2$  对称,

∴对任意实数  $m$ , 都有  $x_1=2+m$  与  $x_2=2-m$  对应的函数值相等;

故①正确;

当  $x=3$  时,  $y=-3a-5$ , 当  $x=4$  时,  $y=-5$ ,

若  $a>0$  时, 当  $3\leq x\leq 4$  时,  $-3a-5\leq y\leq -5$ ,

∴当  $3\leq x\leq 4$  时, 对应的  $y$  的整数值有 4 个, 分别是  $-5, -6, -7, -8$ ,

∴  $-9<-3a-5\leq -8$

∴  $1\leq a<\frac{4}{3}$ ,

若  $a<0$  时, 当  $3\leq x\leq 4$  时,  $-5\leq y\leq -3a-5$ ,

∴当  $3\leq x\leq 4$  时, 对应的  $y$  的整数值有 4 个, 分别是  $-5, -4, -3, -2$ ,

∴  $-2\leq -3a-5<-1$

∴  $-\frac{4}{3}<a\leq -1$ ,

故②正确;

若  $a>0$ , 抛物线与  $x$  轴交于不同两点  $A, B$ , 且  $AB\leq 6$ ,

∴  $\Delta>0$ , 当  $x=5$  时,  $25a-20a-5\geq 0$ ,

$$\therefore \begin{cases} 16a^2+20a>0, \\ 5a-5\geq 0 \end{cases}$$

∴  $a\geq 1$ ,

若  $a<0$ , 抛物线与  $x$  轴交于不同两点  $A, B$ , 且  $AB\leq 6$ ,

∴  $\Delta>0$ , 当  $x=5$  时,  $25a-20a-5\leq 0$ ,

$$\therefore \begin{cases} 16a^2+20a>0, \\ 5a-5\leq 0 \end{cases}$$

∴  $a<-\frac{5}{4}$ ,

综上所述: 当  $a<-\frac{5}{4}$  或  $a\geq 1$  时, 抛物线与  $x$  轴交于不同两点  $A, B$ , 且  $AB\leq 6$ .

故选: D.

## 二、填空题

9. 若二次函数  $y=x^2+bx-5$  的对称轴为直线  $x=2$ , 则关于  $x$  的方程  $x^2+bx-5=2x-13$  的解为  $x_1=2, x_2=4$ .

【解答】解:  $\because$  二次函数  $y=x^2+bx-5$  的对称轴为直线  $x=2$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2}=2,$$

$$\text{得 } b=-4,$$

$$\text{则 } x^2+bx-5=2x-13 \text{ 可化为: } x^2-4x-5=2x-13,$$

$$\text{解得 } x_1=2, x_2=4.$$

故答案为:  $x_1=2, x_2=4$ .

10. 若抛物线  $y=-x^2-6x+m$  与  $x$  轴没有交点, 则  $m$  的取值范围是  $m<-9$ .

【解答】解:  $\because$  抛物线  $y=-x^2-6x+m$  与  $x$  轴没有交点,

$$\therefore \text{当 } y=0 \text{ 时, } 0=-x^2-6x+m,$$

$$\therefore \Delta=(-6)^2-4\times(-1)\times m<0,$$

$$\text{解得, } m<-9$$

故答案为:  $m<-9$ .

11. 若二次函数  $y=-x^2+2x+k$  的图象与  $x$  轴有两个交点, 则  $k$  的取值范围是  $k>-1$ .

【解答】解:  $\because$  二次函数  $y=-x^2+2x+k$  的图象与  $x$  轴有两个交点,

$$\therefore \Delta=4-4\times(-1)\cdot k>0,$$

$$\text{解得: } k>-1,$$

故答案为:  $k>-1$ .

12. 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过点  $A(-3, 0)$ 、 $B(4, 0)$  两点, 则关于  $x$  的一元二次方程  $a(x-1)^2+c=b-bx$  的解是  $x_1=-2, x_2=5$ .

【解答】解: 关于  $x$  的一元二次方程  $a(x-1)^2+c=b-bx$  变形为  $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ ,

因为抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过点  $A(-3, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ,

所以方程  $ax^2+bx+c$  的解为  $x_1=-3, x_2=4$ ,

对于方程  $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ , 则  $x-1=-3$  或  $x-1=4$ , 解得  $x=-2$  或  $x=5$ ,

所以一元二方程  $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$  的解为  $x_1=-2, x_2=5$ .

故答案为  $x_1=-2, x_2=5$ .



13. 抛物线  $y=2x^2+2(k-1)x-k$  ( $k$  为常数) 与  $x$  轴交点的个数是 2.

【解答】解：∵ 抛物线  $y=2x^2+2(k-1)x-k$  ( $k$  为常数)，

∴ 当  $y=0$  时， $0=2x^2+2(k-1)x-k$ ，

∴  $\Delta=[2(k-1)]^2-4\times 2\times(-k)=4k^2+4>0$ ，

∴  $0=2x^2+2(k-1)x-k$  有两个不相等的实数根，

∴ 抛物线  $y=2x^2+2(k-1)x-k$  ( $k$  为常数) 与  $x$  轴有两个交点，

故答案为：2.

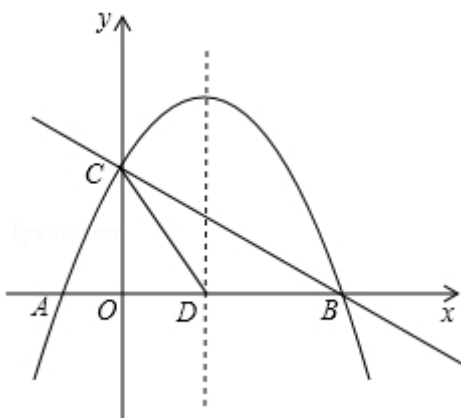
### 三、解答题

14. 如图，抛物线  $y=-x^2+bx+c$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，抛物线的对称轴交  $x$  轴于点  $D$ . 已知  $A(-1, 0)$ ,  $C(0, 3)$ .

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 在抛物线的对称轴上有一点  $M$ ，使得  $MA+MC$  的值最小，求此点  $M$  的坐标；

(3) 在抛物线的对称轴上是否存在  $P$  点，使  $\triangle PCD$  是等腰三角形，如果存在，求出点  $P$  的坐标，如果不存在，请说明理由.



【解答】解：(1) ∵ 抛物线  $y=-x^2+bx+c$  经过  $A(-1, 0)$ ,  $C(0, 3)$  两点，

$$\therefore \begin{cases} -1-b+c=0 \\ c=3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases},$$

∴ 该抛物线的解析式为  $y=-x^2+2x+3$ ;

(2) 由对称性可知，直线  $BC$  与抛物线对称轴的交点就是点  $M$ ，

抛物线  $y=-x^2+2x+3$  的对称轴是直线  $x=-\frac{2}{2\times(-1)}=1$ ，由于点  $A(-1, 0)$ ，则点  $B$

$(3, 0)$ ，

设直线  $BC$  的解析式为  $y=kx+d$ ,

$$\text{则} \begin{cases} 3k+d=0, \\ d=3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-1, \\ d=3 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $BC$  的解析式为  $y=-x+3$ ,

当  $x=1$  时,  $y=-1+3=2$ ,

$\therefore$  点  $M(1, 2)$ ;

(3) 设  $P(1, t)$ , 则  $PC^2=1^2+(t-3)^2$ ,  $CD^2=3^2+1^2=10$ ,  $PD^2=t^2$ ,

根据  $\triangle PCD$  为等腰三角形, 分三种情况讨论:

①当  $PC=CD$  时,

$$\text{则 } 1^2+(t-3)^2=10,$$

解得:  $t=6$  或  $t=0$  (此时点  $P$  与  $D$  重合, 舍去),

$\therefore P(1, 6)$ ;

②当  $CD=PD$  时,

$$\text{则 } 10=t^2,$$

$$\text{解得: } t=\pm\sqrt{10},$$

$\therefore P_1(1, \sqrt{10})$ ,  $P_2(1, -\sqrt{10})$ ;

③当  $PC=PD$  时,

$$\text{则 } 1^2+(t-3)^2=t^2,$$

$$\text{解得: } t=\frac{5}{3},$$

$P(1, \frac{5}{3})$ ;

综上所述, 点  $P$  的坐标为  $(1, 6)$  或  $(1, \sqrt{10})$  或  $(1, -\sqrt{10})$  或  $(1, \frac{5}{3})$ .

## 四、难题拔高

1. 若方程  $\sqrt{a-x}=1-x$  有两个不相等的实数根, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【解析】  $\frac{3}{4} < a \leq 1$

2. 已知  $x^2=2y+5$ ,  $y^2=2x+5$  ( $x \neq y$ ), 则  $x^3-2x^2y^2+y^3$  的值为\_\_\_\_\_.

【解析】 -16