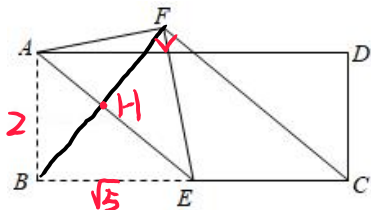


2022 春季初二下数学压轴每日一练（三十七）

2021 无锡新吴区期末

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $BC=2\sqrt{5}$ ， E 是 BC 的中点，将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折，点落 B 在点 F 处，连结 CF ，则 CF 的长为 ()



折叠+中点 $\Rightarrow BF \perp FC$
 \downarrow
 $BF \perp AE$ \swarrow
 $AE \parallel FC$
 $AB=2, BE=\sqrt{5}, AE=3$
 $BH = \frac{2\sqrt{5}}{3}, BF = \frac{4\sqrt{5}}{3}$

$$BC=2\sqrt{5}$$

$$\therefore FC = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\frac{4\sqrt{5}}{3})^2}$$

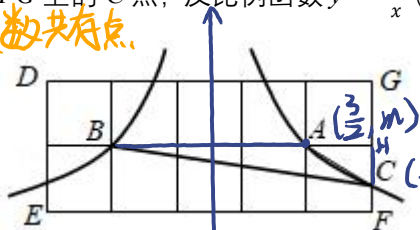
$$= \frac{10}{3}$$

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{4}{3}\sqrt{5}$ C. $\frac{8}{5}\sqrt{5}$ D. $\frac{10}{3}$

2. 如图，在平面直角坐标系中有一个 5×2 的矩形 $DEFG$ 网格，每个小正方形的边长都是 1 个单位长度，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 的图象经过格点 A (小正方形的顶点)，同时还经过矩形 $DEFG$ 的边

FG 上的 C 点，反比例函数 $y = -\frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x < 0$) 的图象经过格点 B ，且 $S_{\triangle ABC} = 1$ ，则 k 的值是 $\frac{5}{2}$ 。

反比例函数共有 2 点
 $xy=k$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times CH = 1$$

$$\therefore CH = \frac{2}{3}$$

$$k = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\therefore A(\frac{3}{2}, m), C(\frac{5}{2}, m - \frac{2}{3})$$

$$A, C \text{ 在反比例函数图象上}$$

$$\frac{3}{2}m = \frac{5}{2}(m - \frac{2}{3}) \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

2021 镇江丹阳期末

3. 综合与实践

如图，四边形 $ABCD$ 和 $AFGH$ 都为正方形，点 F, H 分别在 AB, AD 上，连接 BD, BH, FH ，点 N, M, K 分别是它们的中点。

(1) 观察思考

图 (1) 中，线段 MN 和 MK 的数量关系和位置关系为 $MN \perp MK$ 且 $MN = MK$

(2) 探究证明

将正方形 $AFGH$ 绕点 A 旋转，在旋转的过程中 MN 和 MK 的上述关系是否发生变化？并结合图 (2) 说明理由。

$$MN = \frac{1}{2}DH, MK = \frac{1}{2}BF$$

(3) 连接 DF ，取 DF 的中点 R ，连接 NR, KR 。

$$DH = BF \Rightarrow MN = MK, \text{ 八字型导角}$$

① 判断四边形 $MNRK$ 的形状，并说明理由；

② 若 $AD = 6, AH = 2$ ，在旋转的过程中，四边形 $MNRK$ 的周长的最大值为 16。

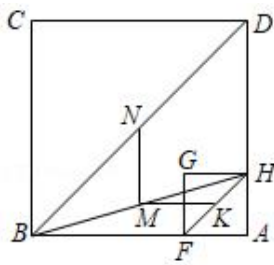


图 (1)

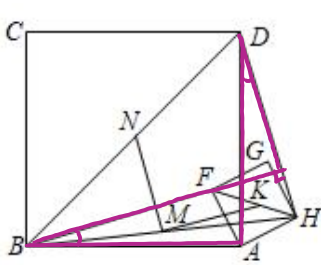


图 (2)

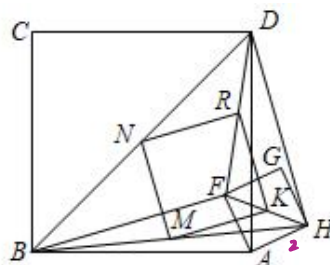


图 (3)

(3) ① 四边形 $MNRK$ 是正方形

证四边形 $MNRK$ 是平行 (中点四边形)
 再结合 (2) 得正方形

② $C_{\square MNRK} = 4MN = 2DH = 2BF$
 \therefore 求周长最大，即求 DH, BF 最大。
 当 D, A, H 三点共线时 DH 最大。
 $1(DH)_{\max} = 8 \therefore (C_{\square MNRK})_{\max} = 16$

4. 我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休”。数形结合是解决数学问题的重要思想方法。

阅读下列材料，回答问题：

对任意的实数 a, b 而言， $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$ ，即 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 。

易知当 $a = b$ 时， $(a - b)^2 = 0$ ，即： $a^2 - 2ab + b^2 = 0$ ，所以 $a^2 + b^2 = 2ab$ 。

若 $a \neq b$ ，则 $(a - b)^2 > 0$ ，所以 $a^2 + b^2 > 2ab$ 。

[类比论证]

对于任意正实数 a, b ， $\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ， $\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (填“<”、“>”、“ \leq ”或“ \geq ”)。
 $\downarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \uparrow$

[几何验证]

如图(1)，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于点 D ， CE 为 $\triangle ABC$ 的中线，若 $AD = a$ ， $BD = b$ ，试根据图形证明： $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 。

[结论应用]

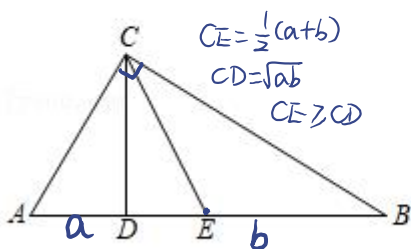
若 $a > 0$ ，则当 $a = 2$ 时，代数式 $a + \frac{4}{a}$ 有最小值为 4。
 $a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$ $a = \frac{4}{a}$ 时 $a = 2$

[问题解决]

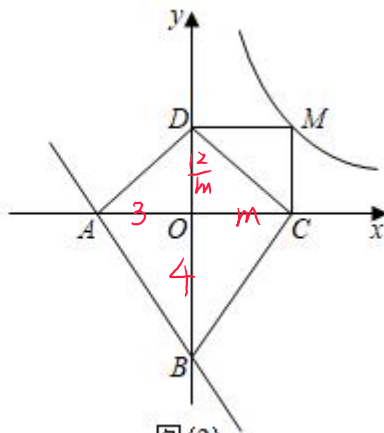
(1) 某汽车零件生产公司为提高工作效率，购进了一批自动化生产设备，已知每台设备每天的运营成本包含以下三个部分：一是固定费用①共 3600 元；二是材料损耗费②每个零件损耗约为 5 元；三是设备折旧费(元)③它与生产的零件个数 x 的函数关系式为 $0.0001x^2$ ，设该设备每天生产汽车零件 x 个。当 x 为多少时，该设备每生产一个零件的运营成本最低？最低是多少元？

(2) 如图(2)，在平面直角坐标系中，直线 $y = -\frac{4}{3}x - 4$ 与坐标轴分别交于点 A, B ，点 M 为反比例函数

数 $y = \frac{12}{x}$ ($x > 0$) 上的任意一点，过点 M 作 $MC \perp x$ 轴于点 C ， $MD \perp y$ 轴于点 D 。则四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 24。



图(1)



图(2)

[几何验证]

$\because \angle ACB = 90^\circ$, CE 为中线.

$\therefore CE = \frac{1}{2}(AD + BD) = \frac{1}{2}(a + b)$

$\because \angle ACD + \angle A = 90^\circ = \angle ACD + \angle BCD$

$\therefore \angle A = \angle BCD$

$\therefore \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD$ 射影定理相似

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$\therefore CD^2 = AD \cdot BD$

$\therefore CD = \sqrt{ab}$

$\therefore CE \geq CD$

$\therefore \frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$

$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$

[问题解决]

设每一个零件的运营成本为 y 元

$$y = \frac{3600 + 5x + 0.0001x^2}{x} = 0.0001x + \frac{3600}{x} + 5$$

$\because x > 0$

$$\therefore 0.0001x + \frac{3600}{x} \geq 2\sqrt{0.0001x \times \frac{3600}{x}} = 1.2$$

当 $0.0001x = \frac{3600}{x}$ 时，即 $x = 6000$ 时，

$0.0001x + \frac{3600}{x}$ 有最小值为 1.2，

$\therefore y_{\min} = 6.2$ 。

答：当 $x = 6000$ 时，每个零件的生产成本最低，最低为 6.2 元。

(2) \because 直线 $y = -\frac{4}{3}x - 4$ 与坐标轴分别交于 A, B

$\therefore A(-3, 0), B(0, -4)$

设 $M(m, \frac{12}{m})$

$\therefore C(m, 0), D(0, \frac{12}{m})$

$\therefore AC = m + 3, BD = \frac{12}{m} + 4$

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2}(m + 3)(\frac{12}{m} + 4) = 2(m + \frac{9}{m}) + 12$

$\because m > 0 \therefore m + \frac{9}{m} \geq 2\sqrt{m \cdot \frac{9}{m}} = 6$

\therefore 当 $m = \frac{9}{m}$ 时，即 $m = 3$ 时， $m + \frac{9}{m}$ 有最小值 6。

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD}$ 的最小值为 24。