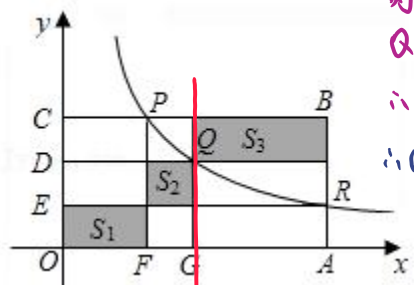


## 2022 春季初二下数学压轴每日一练（二十九）

2022 草桥期中选做题

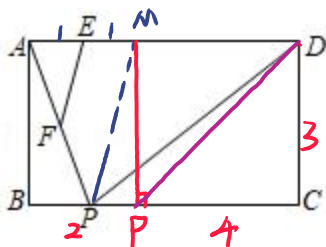
1. 点  $P, Q, R$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  (常数  $k > 0, x > 0$ ) 图象上的位置如图所示, 分别过这三个点作  $x$  轴、 $y$  轴的平行线, 图中所构成的阴影部分面积从左到右依次为  $S_1, S_2, S_3$ . 若  $OE = ED = DC$ ,  $S_1 + S_3 = 25$ , 则  $S_2$  的值为 5.



设  $OE = ED = DC = a$ .  
 则  $P(\frac{k}{3a}, 3a), Q(\frac{k}{2a}, 2a), R(\frac{k}{a}, a)$   
 $\therefore CP = \frac{k}{3a}, DQ = \frac{k}{2a}, ER = \frac{k}{a}$   
 $\therefore OG = AG, OF = 2FG, OF = \frac{2}{3}GA$   
 $S_1, S_2, S_3$  等高不等底  
 $S_1 = 2S_2, S_3 = 3S_2$

$\therefore S_1 + S_3 = 25$   
 $\therefore 5S_2 = 25$   
 $\therefore S_2 = 5$

2. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 3, AD = 6, E$  是  $AD$  上一点,  $AE = 1, P$  是  $BC$  上一动点, 连接  $AP$ , 取  $AP$  的中点  $F$ , 连接  $EF$ , 当线段  $EF$  取得最小值时, 线段  $PD$  的长度是 5.



Q:  $EF$  何时取得最小值?  
 $F$  是中点,  $E$  是定点,  $EF$  是中位线.  
 取  $EM = AE = 1$ ,  
 则  $EF = \frac{1}{2}MP$   
 当  $MP \perp BC$  时,  $MP$  最小,  $EF$  最小.

此时:  $PD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

3. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 3, BC = 4, E, F$  是直线  $AC$  上的两个动点, 分别从  $A, C$  同时出发相向而行, 速度均为每秒 1 个单位长度, 运动时间为  $t$  秒, 其中  $0 \leq t \leq 7$ .

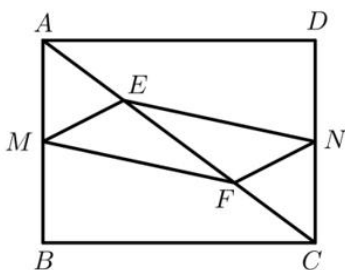


图1

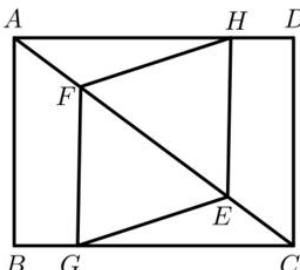


图2

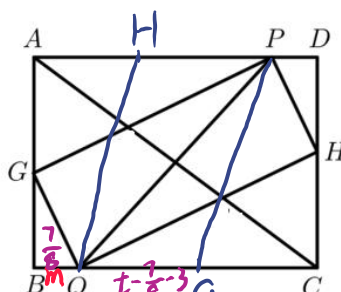


图3

(1) 易证四边形  $EMFN$  是平行四边形.  
 故当  $MN = EF$  时,  
 四边形  $EMFN$  是矩形.  
 $\therefore MN = 4, EF = 5 - 2t$  或  $2t - 5$   
 $\therefore 5 - 2t = 4$  或  $2t - 5 = 4$   
 解得  $t = \frac{1}{2}$  或  $t = \frac{9}{2}$

(1) 如图 1,  $M, N$  分别是  $AB, DC$  中点, 当  $t = \frac{1}{2}$  或  $\frac{9}{2}$  s 时, 四边形  $EMFN$  是矩形;

(2) 若在点  $E, F$  运动的同时, 点  $G$  以每秒 1 个单位长度的速度从  $A$  出发, 沿折线  $A-B-C$  运动, 点  $H$  以每秒 1 个单位长度的速度从  $C$  出发, 沿折线  $C-D-A$  运动.

①如图 2, 当  $t$  为何值时, 四边形  $EGFH$  为菱形:

②如图 3, 作  $AC$  的垂直平分线交  $AD, BC$  于点  $P, Q$ , 当四边形  $PGQH$  的面积是矩形  $ABCD$  面积的一半时, 则  $t$  的值是  $\frac{3}{2}$  或  $\frac{41}{8}$ .

(2) ①易证四边形  $EGFH$  为平行四边形.

故当  $GH \perp EF$  时, 四边形  $EGFH$  为菱形.

$\therefore GH$  过点  $O$ ,  $\therefore GH$  垂直平分  $AC$ .

$\therefore AG = GC = 7 - t$

$\therefore$  在  $Rt\triangle ABG$  中

$$3^2 + (t-3)^2 = (7-t)^2$$

$$\text{解得 } t = \frac{31}{8}$$

③  $P, Q$  是定点, (由  $Q$  的轨迹可得)  
 全  $BQ = m$ , 则  $AQ = QC = 4 - m$ .

$m^2 + 9 = (4 - m)^2$   
 解得  $m = \frac{7}{8}$

当点  $G$  在  $AB$  上时

$$S_{\triangle PAQH} = 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} \times (3 - 0) + \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} \times 7 \times 2$$

$$= 12 - \frac{21}{8} - \frac{7}{4}t = \frac{75}{8} - \frac{7}{4}t$$

$$\therefore S_{\triangle PAQH} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{75}{8} - \frac{7}{4}t = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$\text{解得 } t = \frac{3}{2}$$

当点  $G$  在  $BC$  上时.

$$QG = t - \frac{7}{8} - 3$$

$$S_{\triangle PAQH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$(t - 3 - \frac{7}{8}) \times 3 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$t = \frac{41}{8}$$

$$\text{综上: } t = \frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{41}{8}$$