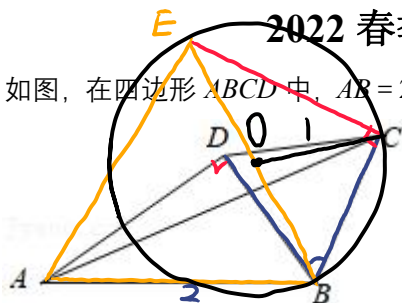


2022 春季数学压轴每日一练 (三十三)

1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=BD$, $\angle ADC=150^\circ$, $\angle DCB=60^\circ$, 则 AC 的最大值是 $\sqrt{3}+1$.



$\triangle BCD$ 是等边

见等边构造等边

$\triangle ABD \cong \triangle EBC$

$\angle ADB = \angle ECB = 90^\circ$

C 的轨迹是以 BE 为直径的圆上一点.

$$(AC)_{\max} = AO + OC = \sqrt{3} + 1$$

2. 如果一个正整数能表示为两个正整数的平方差, 那么称这个正整数为“智慧数”, 否则称这个正整数为“非智慧数”. 例如: $2^2 - 1^2 = 3$; $3^2 - 2^2 = 5$; $3^2 - 1^2 = 8$; $4^2 - 3^2 = 7$; $4^2 - 2^2 = 12$; $4^2 - 1^2 = 15$; ..., 等等.

因此 3, 5, 8, ..., 都是“智慧数”; 而 1, 2, 4, ..., 都是“非智慧数”.

对于“智慧数”, 有如下结论:

① 设 k 为正整数 ($k \geq 2$), 则 $k^2 - (k-1)^2 = 2k-1$. \therefore 除 1 以外, 所有的奇数都是“智慧数”;

② 设 k 为正整数 ($k \geq 3$), 则 $k^2 - (k-2)^2 = 4(k-1)$. \therefore 都是“智慧数” 除 4 以外, 所有 4 的正整数倍数.

(1) 补全结论②中的空缺部分; 并求出所有大于 5 而小于 20 的“非智慧数”;

(2) 求出从 1 开始的正整数中从小到大排列的第 103 个“智慧数”.

① 根据①, 除 1 以外的奇数: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

根据②, 除 4 以外 4 的正整数倍数: 8, 12, 16.

则所有大于 5 而小于 20 的“非智慧数”有: 6, 10, 14, 18.

② 在 1, 2, 3, 4 四个数中, 只有 1 个“智慧数” 3.

当 k 为正整数时, 则 $4k+1, 4k+3$ 是奇数, $4k+2, 4k+4$ 是偶数,

而 $4k+2$ 是“非智慧数”, $4k+1, 4k+3, 4k+4$ 是“智慧数”.

\therefore 在从 1 开始的正整数中只有 3 为“智慧数”, 此后每连续 4 个数中有 3 个“智慧数”.

$$\therefore 100 = 1 + 3 \times 33$$

$$\therefore 4 \times (33+1) = 136$$

又: 136 后面的 3 个“智慧数”为

$$137, 139, 140.$$

\therefore 从 1 开始的正整数中从小到大排列的第 103 个“智慧数”是 140.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知二次函数 $y = -mx^2 + 4mx - 8$ ($m \neq 0$).

(1) 若 $m > 0$, 当 $-1 \leq x \leq 4$ 时, 函数图象的最低点 M 的纵坐标为 -18, 求 m 的值;

(2) 若该函数的图象上有两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 设 $n \leq x_1 \leq n+2$, 当 $x_2 \geq 6$ 时, 总有 $y_1 \leq y_2$, 求 n 的取值范围;

(3) 已知 $A(-4, 0)$ 和 $B(6, 0)$, 若抛物线与线段 AB 只有一个公共点, 求 m 的取值范围.

(1) $\because m > 0$.

$$\therefore -m < 0$$

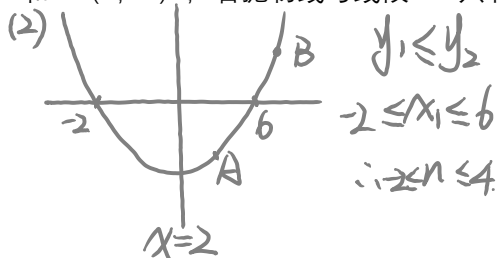
\therefore 抛物线开口向下.

$\because -1 \leq x \leq 4$, 且对称轴为 $x=2$.

\therefore 当 $x=1$ 时, $y=-18$.

$$\therefore -m - 4m - 8 = -18$$

$$\therefore m=2$$



(2) \because 当 $x_2 \geq 6$ 时, 总有 $y_1 \leq y_2$,

\therefore 当 $x > 2$ 时, y 随着 x 的增大而增大.

如图, $x=6$, 关于 $x=2$ 对称的直线为 $x=-2$,

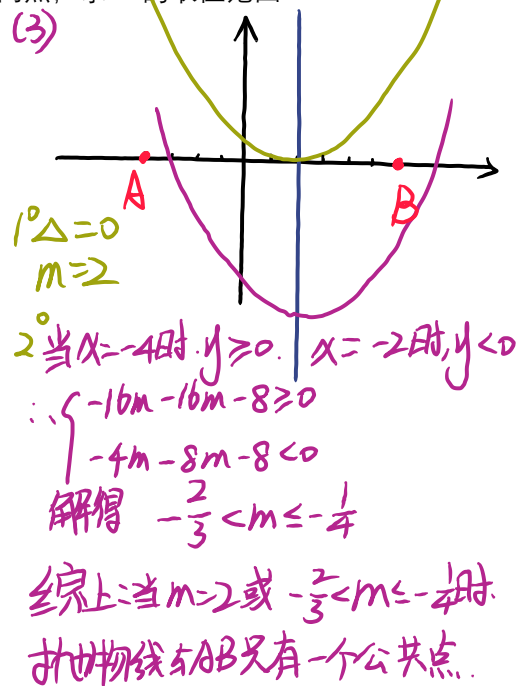
$$\therefore x \geq 6$$

$\therefore B$ 在 $x=6$ 右侧

$\therefore x_2 \geq 6$ 时, 总有 $y_1 \leq y_2$

$\therefore A(x_1, y_1)$ 在 $x=-2$ 与 $x=6$ 之间

$$\therefore \begin{cases} n \geq -2 \\ n+2 \leq 6 \end{cases} \text{ 解得 } -2 \leq n \leq 4.$$



$$1^\circ \Delta = 0$$

$$m=2$$

2. 当 $x=-4$ 时, $y \geq 0$. $x=6$ 时, $y < 0$

$$\therefore \begin{cases} -16m - 16m - 8 \geq 0 \\ -4m - 8m - 8 < 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } -\frac{2}{3} < m \leq -\frac{1}{4}$$

综上所述: 当 $m=2$ 或 $-\frac{2}{3} < m \leq -\frac{1}{4}$ 时, 抛物线与 AB 只有一个公共点.