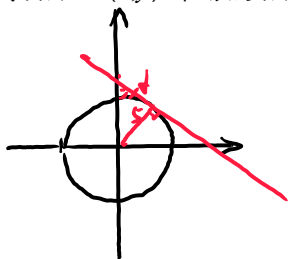


2022 春季数学压轴每日一练 (三十二)

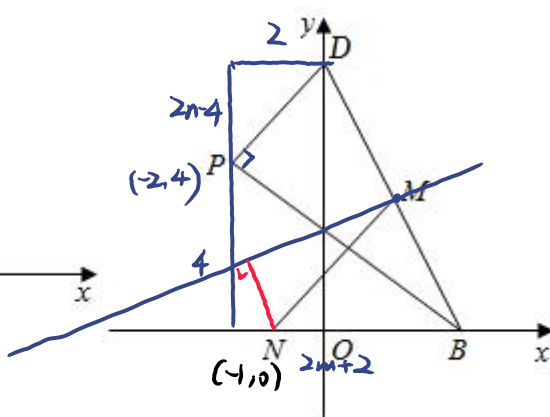
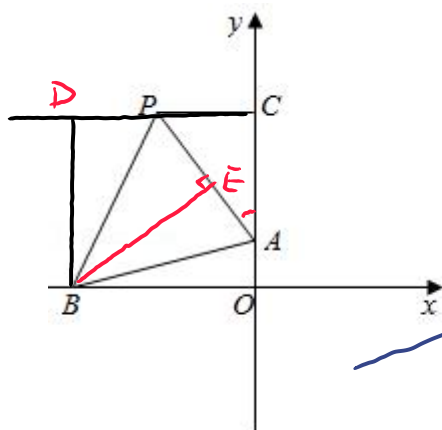
2022 无锡惠山一模

18. 已知点 $P(x, y)$ 在以原点为圆心, 半径为 5 的圆上运动, 则 $3x+4y$ 的最大值为 25.



$$\begin{aligned} 3x+4y &= b \quad b \text{ 最大} \\ y &= -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}b \\ \sin \theta &= \frac{4}{5} \\ \frac{b}{4} &= 5 \times \frac{4}{5} = 20 \\ b &= 25 \end{aligned}$$

28. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 P 的坐标为 (a, b) , 且 a, b 满足 $a^2+4a+4=\sqrt{b-4}+\sqrt{4-b}$, 点 B 为 x 轴上动点, 过点 P 作 $PC \perp y$ 轴于点 C .



$$\begin{aligned} b &= 4, \quad a = -2 \\ P(-2, 4), \quad OP &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 设 } M(m, n) \\ \text{设 } B(2m, 0), \quad D(0, 2n) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{2n-4} = \frac{4^2}{2m+2}$$

$$4n-8 = 2m+2$$

$$4n = 2m+10$$

$$n = \frac{1}{2}m + \frac{5}{2}$$

$$\therefore M \text{ 点的轨迹是直线 } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

(1) 求 O, P 两点间的距离; $2\sqrt{5}$

(2) 如图 1, 点 A 为 y 轴上一点, 连接 PA, PB, AB , 若 $B(-4, 0)$, 且 $\angle APB = 45^\circ + \frac{1}{2}\angle PAC$, 求点 A 的坐标;

(3) 如图 2, 过点 P 作 $PD \perp PB$ 交 y 轴正半轴于点 D , 点 M 为 BD 的中点, 点 $N(-1, 0)$, 则 MN 的最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (请直接写出结果).

(2) 过点 B 作 $BD \perp CP$ 交 CP 延长线于点 D , 作 $BE \perp AP$ 于点 E .

$$\therefore B(-4, 0), \quad C(0, 4)$$

$$\therefore OB = OC = 4$$

$$\therefore \angle BOC = \angle OCD = \angle BDC = 90^\circ$$

$$\therefore \text{四边形 } OBDC \text{ 是正方形.}$$

$$\therefore BD = OB = OC = 4.$$

$$\therefore 2\angle APB = 90^\circ + \angle PAC.$$

$$\therefore \angle BPD = \angle APB$$

$$\text{即 } PB \text{ 平分 } \angle APD$$

$$\therefore BD \perp BP, \quad BE \perp PA$$

$$\therefore BD = BE = 4.$$

$$\text{设 } OA = m, \quad AC = 4 - m$$

$$\begin{aligned} \therefore PA^2 &= 4 + (4 - m)^2 \\ &= m^2 - 8m + 20 \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times PA \times 4$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABP} &= 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times (4 - m) - \frac{1}{2} \times 4 \times m \\ &= 8 - m \end{aligned}$$

$$\therefore 4(m^2 - 8m + 20) = (8 - m)^2$$

$$\text{解得 } m_1 = 4, (\text{舍}) \quad m_2 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore A(0, \frac{4}{3})$$