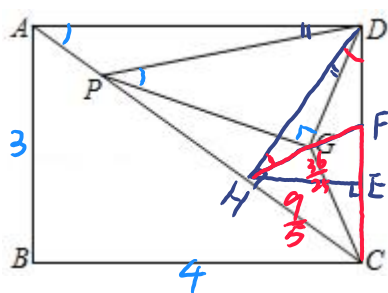


## 2022 春季数学压轴每日一练（二十七）

2022 宜兴外国语学校 3 月月考

10. 如图，在矩形  $ABCD$  中， $AB=3$ ， $BC=4$ ， $P$  是对角线  $AC$  上的动点，连接  $DP$ ，将直线  $DP$  绕点  $P$  顺时针旋转使  $\angle DPG = \angle DAC$ ，且过  $D$  作  $DG \perp PG$ ，连接  $CG$ ，则  $CG$  最小值为  $\frac{36}{25}$ 。



$$\triangle ADH \sim \triangle PDG$$

$$\triangle APD \sim \triangle HGD$$

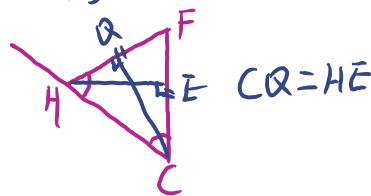
$$\angle DHG = \angle DAC \text{ 定值}$$

点  $G$  的轨迹是  $HF$

$$\angle DHF = \angle HDF$$

$$HF = DF \rightarrow HF = DF = FC$$

直角三角形斜边中线等于斜边一半



27. 阅读理解：

我们知道，四边形具有不稳定性，容易变形．如图 1，一个矩形发生变形后成为一个平行四边形．设这

个平行四边形相邻两个内角中较小的一个内角为  $\alpha$ ，我们把  $\frac{1}{\sin \alpha}$  的值叫做这个平行四边形的变形度．

- (1) 若矩形发生变形后的平行四边形有一个内角是  $150^\circ$ ，则这个平行四边形的变形度是  $2$ ；  
猜想证明： $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

- (2) 若矩形的面积为  $S_1$ ，其变形后的平行四边形面积为  $S_2$ ，试猜想  $S_1$ ， $S_2$ ， $\frac{1}{\sin \alpha}$  之间的数量关系，并说明理由；

拓展探究：

- (3) 如图 2，在矩形  $ABCD$  中， $E$  是  $AD$  边上的一点，且  $AB^2 = AE \cdot AD$ ，这个矩形发生变形后为平行四边形  $A_1B_1C_1D_1$ ， $E_1$  为  $E$  的对应点，连接  $B_1E_1$ ， $B_1D_1$ ，若矩形  $ABCD$  的面积为  $\sqrt{2}m$  ( $m > 0$ )，平行四边形  $A_1B_1C_1D_1$  的面积为  $\sqrt{m}$  ( $m > 0$ )，试求  $\angle A_1E_1B_1 + \angle A_1D_1B_1$  的度数．

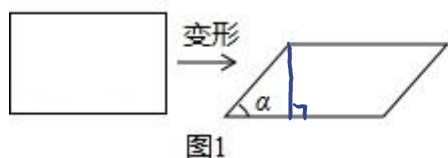


图1

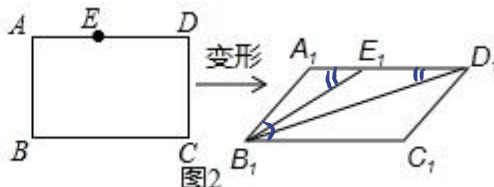


图2

$$S_1 = \sqrt{2}m, S_2 = \sqrt{m}$$

$$S_1 = S_2 \times \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = 45^\circ$$

$$AB^2 = AE \cdot AD \rightarrow A_1B_1^2 = A_1E_1 \cdot A_1D_1$$

$$\triangle A_1B_1E_1 \sim \triangle A_1D_1B_1$$

$$\angle A_1D_1B_1 = \angle A_1B_1E_1$$

$$\angle A_1E_1B_1 + \angle A_1D_1B_1$$

$$= \angle A_1E_1B_1 + \angle A_1B_1E_1$$

$$= \angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$$

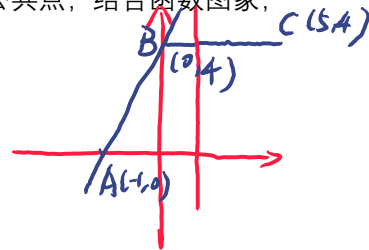
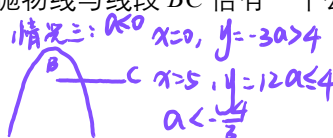
## 2022 春季数学压轴每日一练（二十八）

2022 宜兴外国语学校 3 月月考

18. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $y=4x+4$  与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于点  $A$ ， $B$ ，抛物线  $y=ax^2+bx-3a$  经过点  $A$ ，将点  $B$  向右平移 5 个单位长度，得到点  $C$ 。若抛物线与线段  $BC$  恰有一个公共点，结合函数图象，则  $a$  的取值范围是  $a \geq \frac{1}{3}$  或  $a < -\frac{1}{3}$  或  $a = -1$

$y = ax^2 + bx - 3a$  过点  $A(-1, 0)$   
 $b = -2a$   
 $\therefore y = ax^2 - 2ax - 3a$   
 对称轴：直线  $x = 1$   
 情况一：抛物线  $y = ax^2 - 2ax - 3a$  与  $BC$  相切

情况二： $a < 0$   
 $ax^2 - 2ax - 3a = 4x + 4$   
 $4a^2 + 4a(3a + 4) = 0$   
 $16a^2 + 16a = 0 \Rightarrow a = 0$  或  $a = -1$   
 情况三： $a > 0$   
 $ax^2 - 2ax - 3a = 4x + 4$   
 $x = 0, y = -3a > 4$   
 $x = 5, y = 12a \leq 4$   
 $a < \frac{1}{3}$

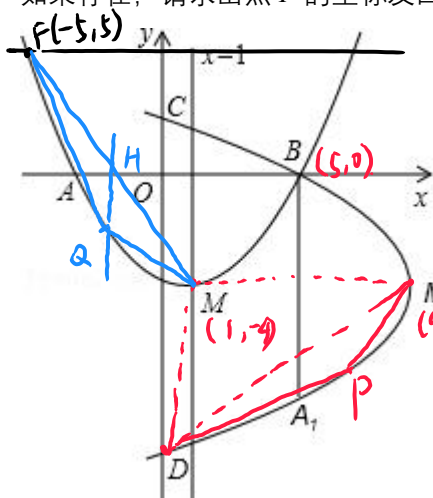


28. 如图，抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  的顶点为  $M$ ，对称轴是直线  $x = 1$ ，与  $x$  轴的交点为  $A(-3, 0)$  和  $B$ 。将抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  绕点  $B$  逆时针方向旋转  $90^\circ$ ，点  $M_1, A_1$  为点  $M, A$  旋转后的对应点，旋转后的抛物线与  $y$  轴相交于  $C, D$  两点。

(1) 写出点  $B$  的坐标及求抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  的解析式；  
 $B(5, 0)$ ， $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$

(2) 求证： $A, M, A_1$  三点在同一直线上；

(3) 设点  $P$  是旋转后抛物线上  $DM_1$  之间的一动点，是否存在一点  $P$ ，使四边形  $PM_1MD$  的面积最大？如果存在，请求出点  $P$  的坐标及四边形  $PM_1MD$  的面积；如果不存在，请说明理由。



(2) 将  $x = 1$  代入  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$

得  $y = -4$ ， $\therefore M(1, -4)$

$\therefore$  旋转： $M_1(9, -4), A_1(5, -8)$

设  $AM$  的解析式为  $y = mx + n$

则有  $\begin{cases} -3m + n = 0 \\ m + n = -4 \end{cases}$  解得  $\begin{cases} m = -1 \\ n = -3 \end{cases}$

$\therefore AM: y = -x - 3$

将  $x = 5$  代入  $y = -x - 3$

$\therefore A_1$  在  $AM$  上， $\therefore A, M, A_1$  三点共线

Q1: 抛物线旋转后解析式列？

不会，所以图形反过来旋转即可。

Q2:  $D$  点旋转前坐标列？

旋转前的对应点在  $y = 5$  上。

$F(-5, 5)$

(3) 存在点  $P$  使得四边形  $PM_1MD$  的面积最大，连接  $M_1D$

$\therefore S_{\triangle M_1MD}$  是定值， $\therefore$  要使四边形面积最大，只要  $S_{\triangle M_1PD}$  最大。

将抛物线  $DM_1$  顺时针旋转  $90^\circ$ ，则  $M_1$  与  $M$  重合。

$D$  落在抛物线上的  $F$  处，则  $F(-5, 5)$ ， $P$  落在抛物线上的  $Q$

$FM: y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

过点  $Q$  作  $QH \parallel y$  轴，交  $FM$  于点  $H$

设  $Q(t, \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{15}{4})$ ， $H(t, -\frac{3}{2}t - \frac{5}{2})$

则  $S_{\triangle M_1PD} = S_{\triangle M_1QF} = \frac{1}{2} \times QH \times 6 = 3(-\frac{3}{2}t - \frac{5}{2} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{15}{4})$

当  $t = -2$  时， $(S_{\triangle M_1PD})_{\max} = \frac{27}{4}$   
 $= -\frac{3}{4}t^2 - 3t + \frac{15}{4}$   
 $= -\frac{3}{4}(t+2)^2 + \frac{27}{4}$

$\therefore Q(-2, -\frac{7}{4})$  则  $P(\frac{27}{4}, -7)$

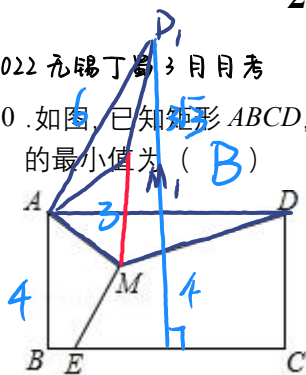
$\therefore S_{\triangle DM_1M} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ ， $\therefore S_{\text{四边形 } PM_1MD} = 24 + \frac{27}{4} = \frac{123}{4}$

综上：存在点  $P(\frac{27}{4}, -7)$  使四边形  $PM_1MD$  面积最大，为  $\frac{123}{4}$ 。

# 2022 春季数学压轴每日一练 (二十九)

2022 无锡丁蜀 3 月月考

10. 如图, 已知矩形  $ABCD$ ,  $AB=4$ ,  $BC=6$ , 点  $M$  为矩形内一点, 点  $E$  为  $BC$  边上任意一点, 则  $MA+MD+ME$  的最小值为 ( B )



$\triangle AMD$  旋转  $60^\circ$

则  $AM=AM_1=MM_1$

$MD=D_1M_1$

则  $MA+MD+ME=MM_1+D_1M_1+ME$   
四点共线时最小

费马点

$\hookrightarrow$  旋转  $60^\circ$

$\hookrightarrow$  向外旋转

A.  $3+2\sqrt{2}$

B.  $4+3\sqrt{3}$

C.  $2+2\sqrt{13}$

D. 10

对称轴: 直线  $x=\frac{3}{2}$

$\rightarrow (0, c), (3, c)$

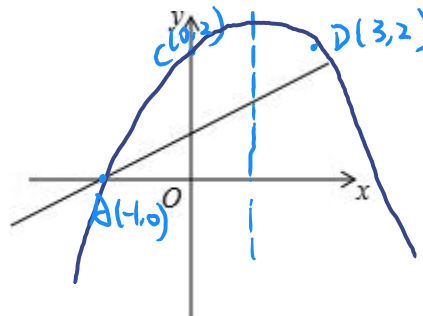
28. 如图, 平面直角坐标系中, 直线  $l: y=\frac{1}{2}x+m$  交  $x$  轴于点  $A$ , 二次函数  $y=ax^2-3ax+c$  ( $a \neq 0$ , 且  $a, c$

是常数) 的图象与  $x$  轴交于  $A, B$  两点 (点  $A$  在点  $B$  的左侧), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 与直线  $l$  交于点  $D$ , 已知  $CD$  与  $x$  轴平行, 且  $S_{\triangle ACD}: S_{\triangle ABD}=3: 5$ .

(1) 求点  $A$  的坐标;

(2) 求此二次函数的解析式;

(3) 点  $P$  为直线  $l$  上一动点, 将线段  $AC$  绕点  $P$  顺时针旋转  $\alpha^\circ$  ( $0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$ ) 得到线段  $A'C'$  (点  $A'$  是对应点, 点  $C'$  是对应点). 请问: 是否存在这样的点  $P$ , 使得旋转后点  $A'$  和点  $C'$  分别落在直线  $l$  和抛物线  $y=ax^2-3ax+c$  的图象上? 若存在, 请直接写出点  $A'$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



(1)  $\because$  对称轴  $y=ax^2-3ax+c$

$\therefore C(0, c)$ , 对称轴为直线  $x=\frac{3}{2}$

$\because CD \parallel x$  轴  $\therefore D(3, c)$

$\because S_{\triangle ACD}: S_{\triangle ABD}=3: 5$ , 且  $CD \parallel AB$

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{3}{5} \therefore AB=5$

$\because$  直线  $y=\frac{1}{2}x+m$  与  $x$  轴交于点  $A$

$\therefore A(-2m, 0) \therefore AB=2 \times [\frac{3}{2}-(-2m)]=5$

$\therefore m=\frac{1}{2} \therefore A(-1, 0) B(4, 0)$

(2) 由 (1) 得 设抛物线为  $y=a(x+1)(x-4)$

$\because m=\frac{1}{2} \therefore AD: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

将点  $D(3, c)$  代入,  $c=2$ .

$\therefore D(3, 2)$ . 代入抛物线.

$\therefore 2=a(3+1)(3-4)$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

(3) 设  $C'$  坐标  $(m, -\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)$

$\therefore C(0, 2) \therefore CP=CP'$

$\therefore P(\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)$

$\because P$  在直线  $l$  上,

$\therefore -\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}m+\frac{1}{2}$

即  $m^2-2m-6=0$  解得  $m=1 \pm \sqrt{7}$ .

当  $m=1+\sqrt{7}$  时,  $y=\frac{3\sqrt{7}}{4} \therefore P(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{4})$

$\therefore AP=AP' \therefore A'(2+\sqrt{7}, \frac{3\sqrt{7}}{2})$

当  $m=1-\sqrt{7}$  时,  $y=\frac{3\sqrt{7}}{4} \therefore P(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{4})$

$\therefore AP=AP' \therefore A'(2-\sqrt{7}, \frac{3\sqrt{7}}{2})$

当  $A$  与  $P$  重合时, 也符合题意

$\therefore A$  与  $A'$  重合, 则  $A'(-1, 0)$

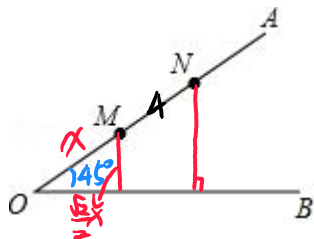
综上:  $A'(2-\sqrt{7}, \frac{3\sqrt{7}}{2})$  或  $(2+\sqrt{7}, \frac{3\sqrt{7}}{2})$

或  $(-1, 0)$

## 2022 春季数学压轴每日一练（三十）

2022 无锡丁蜀 3 月月考

18. 如图,  $\angle AOB = 45^\circ$ , 点  $M, N$  在边  $OA$  上,  $OM = x$ ,  $ON = x + 4$ , 点  $P$  是边  $OB$  上的点. 若使点  $P, M, N$  构成等腰三角形的点  $P$  恰好有三个, 则  $x$  的值是  $x=0$  或  $x=4\sqrt{2}-4$  或  $0 < x < 4\sqrt{2}$



$PM = PN$  只有一个

$PM = 4$  或  $PN = 4$  均有一个

$OM < 4$   
 $PN = 4$   
 $x + 4 = 4\sqrt{2} \rightarrow x = 4\sqrt{2} - 4$

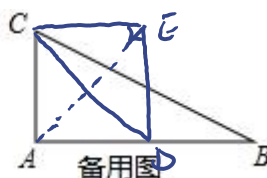
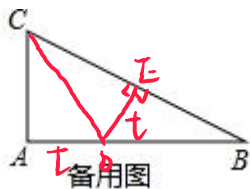
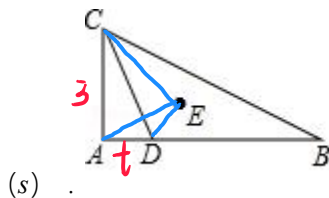
$PM > 4$  或  $PN > 4$  有两个  $\rightarrow x = 0$

$PM = 4$  有两个 或  $PN = 4$  有一个  $\rightarrow$

$OM > 4$   
 $\sqrt{2}x < 4$   
 $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+4) > 4$

$\sqrt{2}x < 8$   
 $4 < x < 4\sqrt{2}$

29. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $AC = 3$ , 动点  $D$  从点  $A$  出发, 在  $AB$  边上以每秒 1 个单位的速度向点  $B$  运动, 连接  $CD$ , 作点  $A$  关于直线  $CD$  的对称点  $E$ , 设点  $D$  运动时间为  $t$



(s)

(1) 若  $\triangle BDE$  是以  $BE$  为底的等腰三角形, 求  $t$  的值;

(2) 若  $\triangle BDE$  为直角三角形, 求  $t$  的值;

(3) 当  $S_{\triangle BCE} \leq \frac{9}{2}$  时, 求所有满足条件的  $t$  的取值范围 (所有数据请保留准确值, 参考数据:  $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ).

(1)  $DE = BD$

由题意得:  $AD = t$ ,

$\angle CAB = 90^\circ$ ,  $\angle CBA = 30^\circ$

$\therefore BC = 2AC = 6$

$\therefore AB = 3\sqrt{3}$ .

$\therefore A, E$  关于  $CD$  对称.

$\therefore CD$  垂直平分  $AE$

$\therefore AD = DE$

$\therefore \triangle BDE$  是以  $BE$  为底的等腰三角形.

$\therefore DE = BD$

$\therefore AD = BD$

$\therefore t = AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\angle DEB = 90^\circ$

$\therefore A, E$  关于  $CD$  对称

$\therefore \angle CED = 90^\circ$ ,  $CE = AC = 3$ ,

$\therefore C, E, B$  三点共线;

$\therefore BE = 3$ .

在  $Rt\triangle DEB$  中

$DE = AD = t$ ,  $\angle B = 30^\circ$

$\therefore AD = DE = BE \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}$

(2)  $\angle EDB = 90^\circ$ , 连结  $CE$

$\therefore \angle EDB = \angle CED = \angle CAD = 90^\circ$

$\therefore$  四边形  $CAD E$  是矩形

$\therefore AD = DE$

$\therefore$  四边形  $CAD E$  是正方形

$\therefore AD = CA$

$\therefore t = 3$

综上所述: 当  $t = \sqrt{3}$  或  $3$  时  $\triangle EDB$  是直角三角形

(3)  $\triangle BCE$  中,  $AC = CE = 3$ .

$\therefore \triangle BCE$  中,  $CE$  不变, 可视为高在变

① 当  $\triangle BCE$  在  $BC$  右侧时,

当  $BE = AC = 3$  时,  $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot BE = \frac{9}{2}$

易得  $\triangle ACH \cong \triangle HBG \therefore CH = BG$

$\therefore \angle ABC = \angle BCG = 30^\circ \therefore \angle ACE = 30^\circ$

$\therefore \angle ACD = 15^\circ \tan \angle ACD = \frac{t}{3} = 2 - \sqrt{3}$

$\therefore t = 6 - 3\sqrt{3}$

当  $0 < t < 6 - 3\sqrt{3}$  时,  $BH$  减小, 面积减小, 最小是  $\frac{9}{2}$ .

② 当  $\triangle BCE$  在  $BC$  左侧时

当  $CE = BH = 3$  时.

$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot BH = \frac{9}{2}$

此时  $BH = DE = AD$

$\therefore t = 3$

当  $t > 3$  时,  $BH$  越大, 面积越大.

$\therefore$  综上所述: 当  $S_{\triangle BCE} \leq \frac{9}{2}$  时,

$t$  的取值范围是  $6 - 3\sqrt{3} \leq t \leq 3$

# 2022 春季数学压轴每日一练 (三十一)

2022 无锡南菁 3 月月考

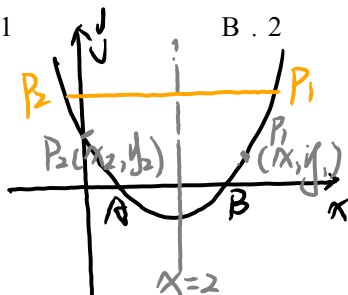
10. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴的交点为  $A(1, 0)$  和  $B(3, 0)$ , 点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  是抛物线上不同于  $A, B$  的两个点, 记  $\triangle P_1AB$  的面积为  $S_1$ ,  $\triangle P_2AB$  的面积为  $S_2$ , 有下列结论: ~~①~~ 当  $x_1 > x_2 + 2$  时,  $S_1 > S_2$ ; ~~②~~ 当  $x_1 < 2 - x_2$  时,  $S_1 < S_2$ ; ~~③~~ 当  $|x_1 - 2| > |x_2 - 2| > 1$  时,  $S_1 > S_2$ ; ~~④~~ 当  $|x_1 - 2| > |x_2 + 2| > 1$  时,  $S_1 < S_2$ . 其中正确结论的个数是 (A)

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



①  $|x_1 - x_2| > 2$

②  $x_1 + x_2 < 2$

$\frac{x_1 + x_2}{2} < 1$  中点在  $x=1$  的左侧

③  $|x_1 - 2| > |x_2 - 2|$   $P_1$  离对称轴更远

④  $P_1$  到  $2$  的距离比  $P_2$  到  $-2$  的距离大. 反例如图.

左侧的点的纵坐标  $y_1, y_2$  大小关系

27. 如图, 抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $x$  轴分别交于  $A, B$  两点 (点  $A$  在点  $B$  的左侧), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 且  $OB = OC = 3OA$ .

(1) 求该抛物线的函数表达式;  $y = x^2 - 2x - 3$ .

(2) 如图 1, 点  $D$  是该抛物线的顶点, 点  $P(m, n)$  是第二象限内抛物线上的一个点, 分别连接  $BD, BC, BP$ , 当  $\angle PBA = 2\angle CBD$  时, 求  $m$  的值;

(3) 如图 2,  $\angle BAC$  的角平分线交  $y$  轴于点  $M$ , 过  $M$  点的直线  $l$  与射线  $AB, AC$  分别于  $E, F$ , 已知当直线  $l$  绕点  $M$  旋转时,  $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$  为定值, 请直接写出该定值.

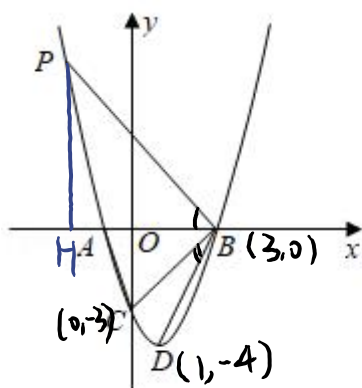


图1

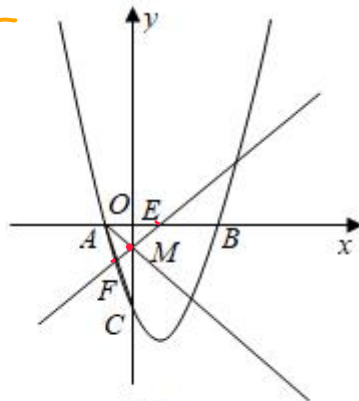
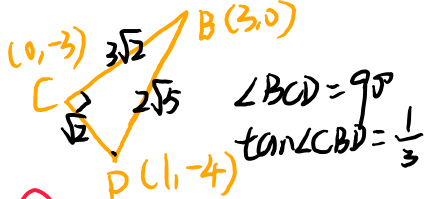


图2

①  $\tan \angle CBD = \frac{1}{3}$



② 作  $BD$  的垂直平分线

交  $BC$  于点  $T$

$\therefore DT = TB$ . 设  $CT = m$

则  $DT = TB = 3\sqrt{2} - m$

$\therefore (\sqrt{2})^2 + m^2 = (3\sqrt{2} - m)^2$

$m = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan \angle DTC = \tan \angle DBC = \frac{3}{4}$

(2)  $\tan \angle CBD = \frac{1}{3}$ , ①

$\tan 2\angle CBD = \frac{3}{4}$  ②

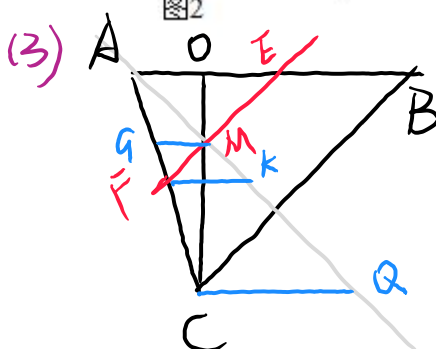
$\tan \angle PBA = \frac{3}{4}$

设  $(m, m^2 - 2m - 3)$

$\frac{m^2 - 2m - 3}{3 - m} = \frac{3}{4}$  ③  $\frac{PH}{HB} = \frac{3}{4}$

解得  $m_1 = 3$  (舍),  $m_2 = -\frac{7}{4}$

$\therefore m = -\frac{7}{4}$



过  $M$  作  $MG \parallel x$  轴交  $AC$  于点  $G$

过  $F$  作  $FG \parallel x$  轴交  $AM$  于点  $K$

过  $C$  作  $CQ \parallel x$  轴交  $AM$  于点  $Q$

角平分线 + 平行  $\rightarrow AC = CQ$

$\triangle COA \sim \triangle CMQ, \triangle ACQ \sim \triangle AGM$

$\frac{GM}{AO} = \frac{CQ}{AC}$  ③  $\frac{GM}{CQ} = \frac{AG}{AC}$  ④

① + ② = ③ + ④

$\frac{GM}{AO} + \frac{GM}{CQ} = \frac{CQ}{AC} + \frac{AG}{AC} = 1$

$\frac{1}{AO} + \frac{1}{CQ} = \frac{1}{AM}$

$\frac{1}{AO} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AM} = \frac{10 + \sqrt{10}}{10}$

同理

$\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{AM}$