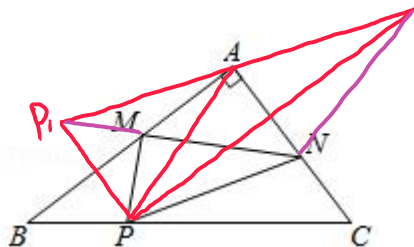


2022 春季数学压轴每日一练（七）

2021 吴中区三区一模

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 3$, M 、 N 、 P 分别是边 AB 、 AC 、 BC 上的动点, 连接 PM 、 PN 和 MN , 则 $PM+PN+MN$ 的最小值是 $\frac{24}{5}$.

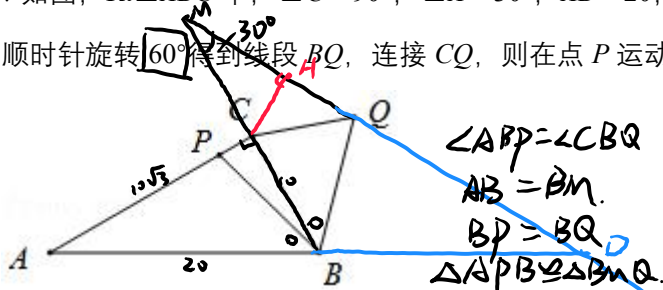


三线段最值, 做两次对称
 \odot : 三个点都是动的
 A : 假装 P 是定点
 P, A, P_2 三点共线
 why? $AP_1 = AP = AP_2$
 $\angle P_1 P P_2 = 90^\circ$

$PM+PN+MN$
 $= P_1M+P_2N+MN$
 当 P_1, M, N, P_2 四点共线时最小
 此时 M, N 在 AA' 上
 $PM+PN+MN = 2AP$
 当 $AP \perp BC$ 时最小

2021 景范二模

18. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 20$, 点 P 是 AC 边上的一个动点, 将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到线段 BQ , 连接 CQ , 则在点 P 运动过程中, 线段 CQ 的最小值为 5.



找到点 Q 的运动轨迹
 $\angle MBQ = 30^\circ$
 Q 的方向确定
 延长 MQ , AB 交于点 D
 $\triangle BMD$ 为 120° 的等腰三角形
 $CM = 10$
 $CH = 5$

27. 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 边 $AC = 6$, $BC = 8$, 点 M 、 N 分别在线段 AC 、 BC 上, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 翻折, 点 C 的对应点是点 C' .

(1) 当 M 、 N 分别是边 AC 、 BC 的中点时, 求出 CC' 的长度;

(2) 若 $CN = 2$, 点 C' 到线段 AB 的最短距离是 $\frac{9}{5}$; (2) C' 的运动轨迹是以点 N 为圆心, 2 为半径的圆.

(3) 如图 2, 当点 C' 落在边 AB 上时,

① 点 C' 运动的路程长度是 ;

② 当 $AM = \frac{36}{11}$ 时, 求出 CN 的长度

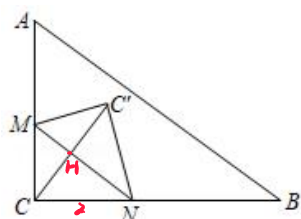


图 1

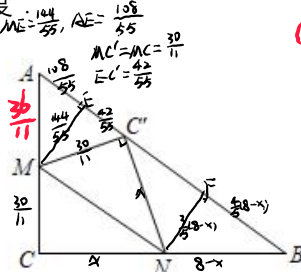


图 2

(1) 设 CC' 与 MN 的交点为 H .
 $\because AM = CM, CN = BN$
 $\therefore MN \parallel AB$
 $\therefore MC = MC', NC = NC'$
 $\therefore MN$ 垂直平分 CC'
 $\therefore CC' \perp AB$, 且点 C' 落在 AB 上.
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中
 $AB = 10$.
 $\therefore \frac{1}{2}AB \cdot CC' = \frac{1}{2}AC \cdot BC$
 $\therefore CC' = \frac{24}{5}$

$$\frac{x}{\frac{3}{5}(8-x)} = \frac{\frac{30}{11}}{\frac{42}{55}}$$

(分式方程检验)

$$x = \frac{60}{11}$$

$$\therefore CN = \frac{60}{11}$$

③ ① C' 在 AB 上, 求路程则用机值法
 当 M 与 A 重合时
 $AC' = AC = 6$ (最下方)
 当 N 与 B 重合时
 $AC' = AB - BC' = 10 - 8 = 2$ (最上方)
 $\therefore C$ 的路径为 $6 - 2 = 4$

② 思路三垂直
 见垂直, 作一线三直角相似
 过程略
 $CN = \frac{60}{11}$

28. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ($a > 0$) 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左边), 与 y 轴交于点 C , 且 $OB = OC$.

含参, 因式分解

$$A(-1, 0) \quad B(3, 0) \quad C(0, -3a)$$

(1) 求抛物线的解析式;

$$OB = OC, \quad 3a = 3, \quad a = 1$$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3$$

(2) 如图 1, 若点 P 是线段 BC (不与 B, C 重合) 上一动点, 过点 P 作 x 轴的垂线交抛物线于 M 点, 连接 CM , 将 $\triangle PCM$ 沿 CM 对折, 如果点 P 的对应点 N 恰好落在 y 轴上, 求此时点 P 的坐标;

(3) 如图 2, 若第四象限有一动点 E , 满足 $BE = OB$, 过 E 作 $EF \perp x$ 轴于点 F , 设 F 坐标为 $(t, 0)$, $0 < t < 3$, $\triangle BEF$ 的内心为 I , 连接 CI , 直接写出 CI 的最小值.

找点 I 的轨迹

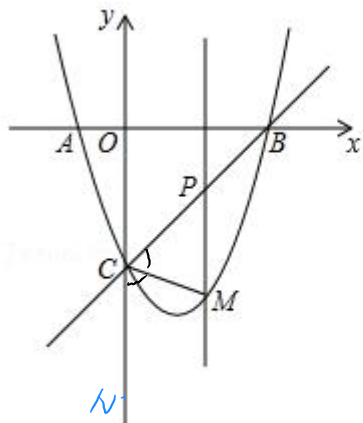


图1

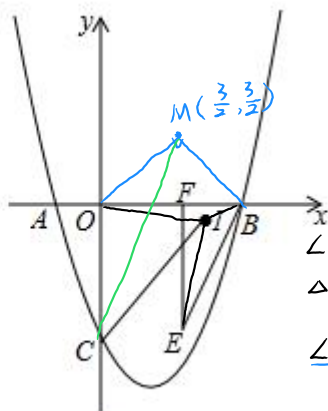


图2

$$\angle BIE = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 90^\circ = 135^\circ$$

$\triangle OBI \sim \triangle EBI$ (想想 $BE = OB$ 是干嘛的, 再结合内心, 其实不难想到)

$$\angle OIB = 135^\circ$$

定边定角想圆

圆周角 $135^\circ \rightarrow$ 圆心角 $270^\circ / 90^\circ$

以 OB 为弦作等腰 $\triangle OMB$

的轨迹是以 M 为圆心, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆

$$(CI)_{\min} = CM - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2) CM 是角平分线.

平行 + 角平分线 \rightarrow 等腰

$$CP = PM$$

余斗代直

$$M(m, m^2 - 2m - 3)$$

$$P(m, m - 3)$$

$$PC = \sqrt{2}m$$

$$\therefore MP = \sqrt{2}m$$

\therefore 对折

$\therefore CM$

$$\therefore \angle PCM = \angle MCV$$

$$\therefore PM \perp x \text{ 轴, 即 } PM \parallel y \text{ 轴}$$

$$\therefore \angle PMC = \angle MCV$$

$$\therefore \angle PCM = \angle PMC$$

$$\therefore PC = PM$$

$$\therefore B(3, 0) \quad C(0, 3)$$

$$\therefore BC: y = x - 3$$

$$\text{设 } M(m, m^2 - 2m - 3)$$

$$\text{则 } P(m, m - 3)$$

$$\therefore PM = -m^2 + 3m$$

$$\therefore OB = OC, \angle BOC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OCB = 45^\circ$$

$$\therefore PC = \sqrt{2}m$$

$$\therefore -m^2 + 3m = \sqrt{2}m$$

$$\text{解得: } m_1 = 0 \text{ (舍)}, m_2 = 3 - \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{当 } m = 3 - \sqrt{2} \text{ 时, } m - 3 = -\sqrt{2}$$

$$\therefore P(3 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$