

2022 春季数学压轴每日一练（五）

2021 新区一中 3 月月考

10. 已知点 $P(x_0, y_0)$ 和直线 $y = kx + b$ ，求点 P 到直线 $y = kx + b$ 的距离 d 可用公式 $d = \frac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{1+k^2}}$ 计算.

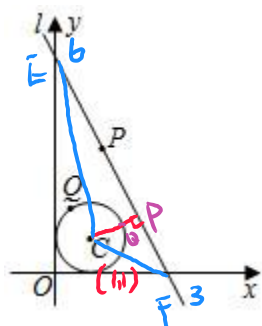
根据以上材料解决下面问题: 如图, $\odot O$ 的圆心 C 的坐标为 $(1, 1)$, 半径为 1, 直线 l 的表达式 $y = -2x + 6$, P 是直线 l 上的动点, Q 是 $\odot C$ 上的动点, 则 PQ 的最小值是 (**B**)

A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1$

C. $\frac{6\sqrt{5}}{5} - 1$

D. 2



当 $CP \perp l$ 时 PQ 最小

方法一: 代入公式

方法二: 传统等积. $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 - \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = \frac{9}{2}$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \times EF \times h = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times h$$

$$h = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

18. 甲、乙两人沿同一条直路走步, 如果两人分别从这条直线上的 A, B 两处同时出发, 都以不变的速度相向而行, 图 1 是甲离开 A 处后行走的路程 y (单位: m) 与行走时间 x (单位: min) 的函数图象, 图 2 是甲、乙两人之间的距离 y (单位: m) 与甲行走时间 x (单位: min) 的函数图象, 则 $a - b = \underline{\frac{1}{2}}$.

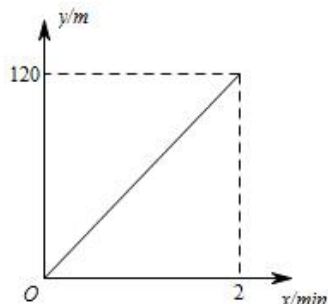


图1

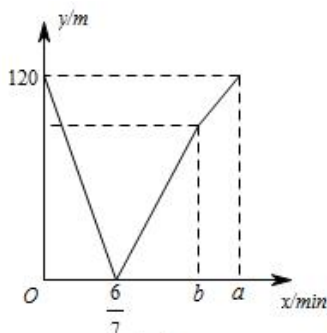


图2

1. AB 两地相距 120 m.

2. $v_{\text{甲}} = 60 \text{ m/min}$

3. $\frac{6}{7} \text{ min}$ 相遇 $\rightarrow v_{\text{甲}} + v_{\text{乙}} = \frac{120}{\frac{6}{7}} = 140$

\downarrow
 $v_{\text{乙}} = 80 \text{ m/min}$

4. b 代表乙先到达终点

$$b = \frac{120}{80} = \frac{3}{2}$$

5. a 代表甲到达终点

$$a = 2$$

① 看懂纵轴.

② 看懂拐点.

新定义 \rightarrow 转化为已知内容.

27. (本题满分 10 分) 定义: 若四边形有一组对角互补, 一组邻边相等, 且相等邻边的夹角为直角, 做这样的图形称为“直角等邻对补”四边形, 简称“直等补”四边形.

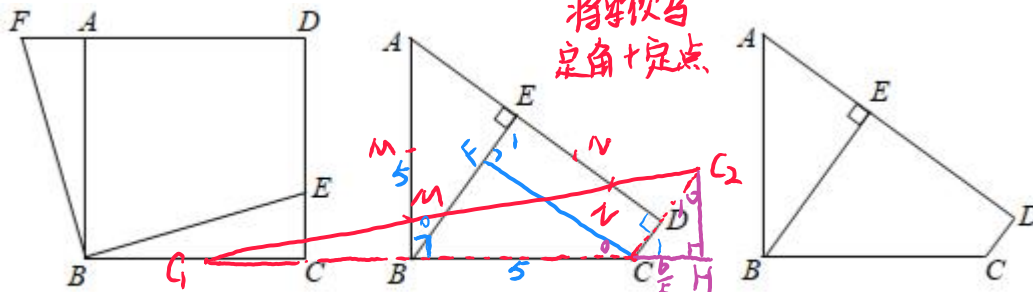
根据以上定义, 解决下列问题:

(1) 如图 1, 正方形 $ABCD$ 中, E 是 CD 上的点, 将 $\triangle BCE$ 绕 B 点旋转, 使 BC 与 BA 重合, 此时点 E 的对应点 F 在 DA 的延长线上, 则四边形 $BEDF$ 为“直等补”四边形, 为什么? 是 我: 你们自己证

(2) 如图 2, 已知四边形 $ABCD$ 是“直等补”四边形, $AB = BC = 5$, $CD = 1$, $AD > AB$, 点 B 到直线 AD 的距离为 BE .

① 求 BE 的长;

② 若 M 、 N 分别是 AB 、 AD 边上的动点, 求 $\triangle MNC$ 周长的最小值.



求线段长

① 勾股

② 相似

③ 等积

④ 三角函数.

图 1 (2) ① 过点 C 作 $CF \perp BE$, 交 BE 于点 F

\because 四边形 $ABCD$ 是“直等补”四边形

$AB = BC = 5$, $CD = 1$, $AD > AB$

$\therefore \angle ABC = \angle D = 90^\circ$

$\therefore BE \perp AD$, $CF \perp BF$

$\therefore \angle DEF = \angle CFE = 90^\circ$

\therefore 四边形 $CDEF$ 是矩形.

$\therefore DE = CF$, $EF = CD = 1$

$\therefore \angle ABE + \angle A = 90^\circ$, $\angle ABE + \angle CBE = 90^\circ$

$\therefore \angle A = \angle CBF$

$\therefore \angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$, $AB = BC$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF$ (AAS)

$\therefore BE = CF$, $AE = BF$

$\therefore DE = CF$

$\therefore BE = DE$

设 $BE = x$, 则 $AE = BF = x - 1$

$$x^2 + (x - 1)^2 = 25$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3 \text{ (舍)}$$

$$\therefore BE = 4$$

备用图

② 分别过 AB 、 AD 作 C 的对称点 C_1 、 C_2 .

由对称性可知 $C_1M = CM$

$$C_2N = CN$$

$$\therefore C_{\triangle MNC} = MN + CM + NC$$

$$\therefore C_{\triangle MNC} = MN + C_1M + C_2N$$

当 C_1 、 M 、 N 、 C_2 四点共线时

$C_{\triangle MNC}$ 最小, 最小值为 C_1C_2 .

$$\therefore \angle CC_2H = \angle FCB$$

$$\therefore \tan \angle CC_2H = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \angle CC_2H = \frac{3}{5}, \cos \angle CC_2H = \frac{4}{5}$$

$$\therefore CC_2 = 2$$

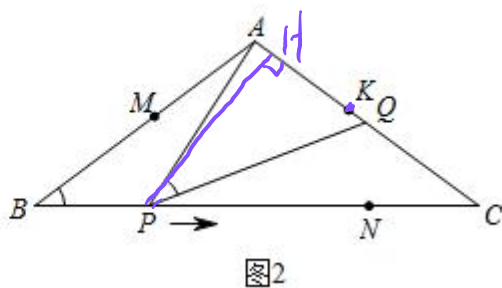
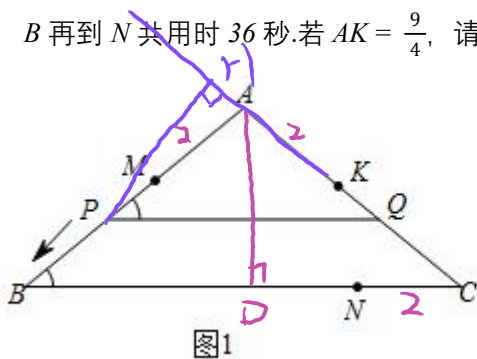
$$\therefore CH = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}, C_2H = 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore C_1H = \frac{56}{5}$$

$$\therefore C_1C_2 = \sqrt{\left(\frac{56}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = 8\sqrt{2}$$

$\therefore \triangle MNC$ 周长的最小值为 $8\sqrt{2}$

28. (本题满分 10 分) 如图 1 和图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=8$, $\tan C = \frac{3}{4}$. 点 K 在 AC 边上, 点 M , N 分别在 AB , BC 上, 且 $AM=CN=2$. 点 P 从点 M 出发沿折线 $MB-BN$ 匀速移动, 到达点 N 时停止; 而点 Q 在 AC 边上随 P 移动, 且始终保持 $\angle APQ = \angle B$.
- (1) 当点 P 在 BC 上时, 求点 P 与点 A 的最短距离;
 - (2) 若点 P 在 MB 上, 且 PQ 将 $\triangle ABC$ 的面积分成上下 4:5 两部分时, 求 MP 的长;
 - (3) 设点 P 移动的路程为 x , 当 $0 \leq x \leq 3$ 及 $3 < x \leq 9$ 时, 分别求点 P 到直线 AC 的距离 (用含 x 的式子表示);
 - (4) 在点 P 处设计并安装一扫描器, 按定角 $\angle APQ$ 扫描 $\triangle APQ$ 区域 (含边界), 扫描器随点 P 从 M 到 B 再到 N 共用时 36 秒. 若 $AK = \frac{9}{4}$, 请直接写出点 K 被扫描到的总时长.



$$AB=AC=5, AD=3.$$

(1) 当 P 在 BC 上时, $PA \perp BC$.

P 到 A 的最短距离即为 $AD=3$

(2) $\because \angle APQ = \angle B$

$\therefore PQ \parallel BC$

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC$

$\because PQ$ 将 $\triangle ABC$ 面积分为 4:5 两部分

$$\therefore \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore AB=5$$

$$\therefore AP = \frac{10}{3}$$

$$\therefore MP = \frac{4}{3}$$

(3) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 如图 1.

点 P 到 AC 的距离为 PH

$$MP = x, AP = x+2.$$

$$\therefore PQ = 2 \times \frac{4}{5}(x+2) = \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}$$

$$\therefore PH = \frac{3}{5}PQ = \frac{24}{25}x + \frac{48}{25}$$

当 $3 < x \leq 9$ 时,

$$BP = x-3, PC = 11-x.$$

$$\therefore PH = \frac{3}{5}(11-x) = \frac{33}{5} - \frac{3}{5}x$$

$$\text{综上: } PH = \begin{cases} \frac{24}{25}x + \frac{48}{25} & (0 \leq x \leq 3) \\ -\frac{3}{5}x + \frac{33}{5} & (3 < x \leq 9) \end{cases}$$

$$(4) BM + BN = 3 + 6 = 9$$

$$\therefore v_P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

当 $3 < t \leq 9$ 时,

$$AB=5, BP=x-3, PC=11-x.$$

一线三等角易证 $\triangle ABP \sim \triangle PCQ$

$$\frac{AB}{BP} = \frac{PC}{QC}$$

$$\therefore QC = \frac{1}{5}(x-3)(11-x)$$

$$\therefore AK = \frac{9}{4}, \therefore KC = \frac{11}{4}$$

当 $QC = KC$ 时,

$$x = 7 \pm \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{点 } K \text{ 被扫描总时长} = \left(\frac{11}{4} + 6 - 3\right) \div \frac{1}{4} = 23 \text{ s}$$