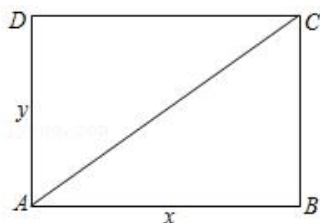


## 2022 春季数学压轴每日一练（四）

2021 常熟一模

1. 如果一个矩形的周长与面积的差是定值  $m$  ( $2 < m < 4$ )，我们称这个矩形为“定差值矩形”。如图，在矩形  $ABCD$  中， $AB = x$ ， $AD = y$ ， $2(x+y) - xy = \frac{7}{2}$ ，那么这个“定差值矩形”的对角线  $AC$  的长的最小值为 ( C )



A.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

B.  $\sqrt{5}$

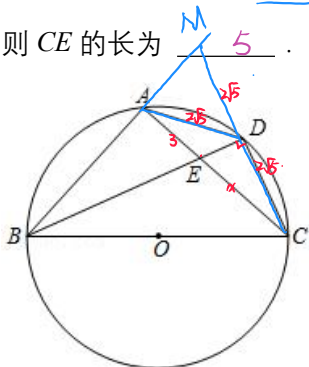
C.  $\sqrt{3}$

D.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{\frac{7}{2}+xy}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2}xy \\ AC^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}xy\right)^2 - 2xy \\ &= \frac{49}{16} + \frac{7}{4}xy + \frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy \\ &= \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{49}{16} \\ &= \frac{1}{4}\left(xy - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{16} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{4}\left(xy - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \geq 3 \\ \therefore AC^2 &\geq 3 \\ \therefore AC &\geq \sqrt{3} \end{aligned}$$

替换xy亦可.

2. 如图，点  $A, D$  在以  $BC$  为直径的  $\odot O$  上，且  $D$  是  $\widehat{AC}$  的中点， $AC$  与  $BD$  交于点  $E$ 。若  $AE = 3$ ， $CD = 2\sqrt{5}$ ，则  $CE$  的长为 5。



①  $BD \perp DC$   
②  $BD$  平分  $\angle ABC$   
→ 构造等腰得弦心距  
 $\triangle DAM \sim \triangle BCM$   
等腰底角相等相似。  
 $\triangle DEC \sim \triangle AMC$   
 $\frac{2\sqrt{5} \cdot CE}{x} = \frac{AC \cdot x + 3}{x+3}$   
 $x(x+3) = 40$   
 $x^2 + 3x - 40 = 0$   
 $(x+8)(x-5) = 0$   
 $x = -8$  (舍),  $x = 5$

直角  $\odot$   $BD \perp DC$   $BD$  平分  $\angle ABC$   
弧中点  $\rightarrow$  角平分线②  
角相等  $\rightarrow$  弦相等

3. 将一张矩形纸片  $OABC$  放置在平面直角坐标系中，点  $A$  的坐标为  $(3, 0)$ ，点  $C$  的坐标为  $(0, 4)$ 。点  $D$  是  $BC$  边上的一个动点（点  $D$  不与点  $B, C$  重合），将  $\triangle ODC$  沿  $OD$  翻折得到  $\triangle ODC'$ ，设  $CD = x$ 。

- (1) 如图 1，若  $\angle COD = 18^\circ$ ，则  $\angle BDC' =$  36°；  
(2) 如图 2，连接  $AC'$ ，当  $x = 2$  时，求  $\triangle OAC'$  的面积；  
(3) 连接  $BC'$ ，当  $x$  为何值时， $\triangle BDC'$  为直角三角形？

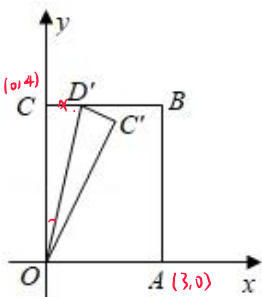


图1

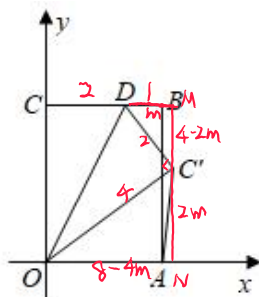
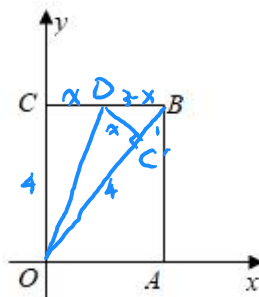


图2



备用图

(3) ①  $\angle BDC' = 90^\circ$

则  $\angle CDO = \angle C'DO = 45^\circ$

$\triangle COD$  为等腰直角。

而  $OC = 4, BC = 3$  故此情况不存在。

②  $\angle DBC' = 90^\circ$

此时  $C'$  在  $AB$  上。

$(3-x)^2 + (4-\sqrt{5})^2 = x^2$

$x = \frac{16-4\sqrt{5}}{3}$

③  $\angle DC'B = 90^\circ$

$x^2 + 1 = (3-x)^2$

$x = \frac{4}{3}$

综上:  $x = \frac{16-4\sqrt{5}}{3}$  或  $\frac{4}{3}$ 。

折叠找准位置是关键。

4. 问题一：已知二次函数： $y = \frac{2}{3}(x-m)^2 - 2m - \frac{2}{3}$  ( $m$  为常数)，当  $m$  取不同的值时，其图象构成一个“抛物线系”。我们发现：是当  $m$  取不同数值时，此二次函数的图象的顶点在同一条直线上，那么这条直线的表达式是  $y = -2x - \frac{2}{3}$  ( $m, -2m - \frac{2}{3}$ )

问题二：已知直线  $l: y = \frac{2}{3}x - 2$  交  $x$  轴于点  $A$ ，交  $y$  轴于点  $B$ ，抛物线  $L: y = \frac{2}{3}(x-m)^2 - 2m - \frac{2}{3}$  ( $m$  为常数) 图象的顶点为  $C$ 。

(1) 如图 1，若点  $C$  在  $\text{Rt}\triangle AOB$  的内部 (不包括边界)，求  $m$  的取值范围；

(2) 如图 2，当抛物线  $L$  的图象经过点  $A, B$  时，在抛物线上 ( $AB$  的下方) 是否存在点  $P$ ，使  $\angle ABO = \angle ABP$ ？若存在，求出点  $P$  的横坐标；若不存在，请说明理由。

可用角平分线做

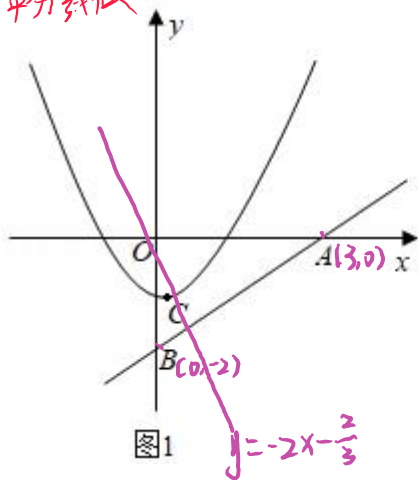


图1

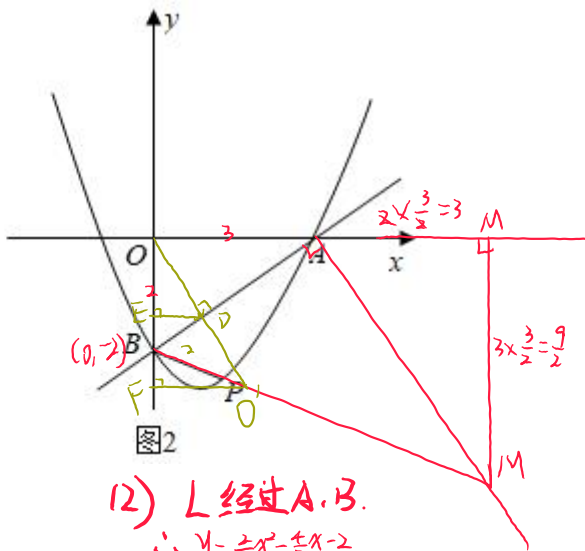


图2

(1) 思路一：

图像法：求出  $y = -2x - \frac{2}{3}$   
与  $y = \frac{2}{3}x - 2$  的交点  $M$

$$\begin{cases} y = -2x - \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases} \quad M(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3})$$

$\because C$  在  $\triangle AOB$  内部

$$\therefore 0 < m < \frac{1}{2}$$

思路二：

$$\begin{cases} 0 < m < 3 \\ -2m - \frac{2}{3} > \frac{2}{3}m - 2 \end{cases} \quad \text{图像在上方.}$$

$$\therefore 0 < m < \frac{1}{2}$$

(2)  $L$  经过  $A, B$ .

$$\therefore y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x - 2$$

$$\text{法一: } \tan \angle ABP = \frac{3}{2}$$

过点  $A$  作  $AM \perp AB$ ，交  $BP$  延长线于  $M$ 。

$$\therefore M(6, -\frac{9}{2})$$

$$BM: y = -\frac{5}{2}x - 2$$

$$x_P = \frac{11}{8}$$

法二：角平分线 (作已知直线对称点)

过  $AB$  作  $O$  的对称点  $O'$

$$D(\frac{12}{13}, -\frac{18}{13})$$

$$O'(\frac{24}{13}, -\frac{36}{13})$$

$$BO': y = -\frac{5}{12}x - 2$$

$$x_P = \frac{11}{8}$$

