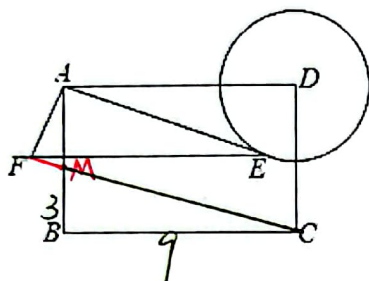


2022 春季数学压轴每日一练 (三)

2021 新区二模

1. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=9$, 以 D 为圆心, 3 为半径作 $\odot D$, E 为 $\odot D$ 上一动点, 连接 AE ,

以 AE 为直角边作 $Rt\triangle AEF$, 使 $\angle EAF=90^\circ$, $\tan \angle AEF=\frac{1}{3}$, 则点 F 与点 C 的最小距离为 (A.)



A. $3\sqrt{10}-1$

B. $3\sqrt{7}$

C. $3\sqrt{7}-1$

D. $\frac{9}{10}\sqrt{109}$

思路1: 构造.
 $\angle FAE = \angle BAD = 90^\circ$
 $AF = \frac{1}{3}AE$
 取 $AM = \frac{1}{3}AD$
 即 M 为 AB 的中点.
 F 的轨迹是以 M 为圆心, 为半径的圆.

思路2: 旋转相似.

$\angle FAE = \angle BAD = 90^\circ$

$AF = \frac{1}{3}AE$, $AM = \frac{1}{3}AE$

$\triangle FAM \sim \triangle EAD$, $FM = \frac{1}{3}DE = 1$

$(FC)_{\min} = CM - 1$
 $= \sqrt{10} - 1$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 M, N 的坐标分别为 $(-1, 2)$, $(2, 1)$, 若抛物线 $y = ax^2 - x + 2$ ($a \neq 0$) 与线段 MN 有两个不同的交点, 则 a 的取值范围是

当 $a > 0$ 时 $\frac{1}{2a} \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$
 $a \leq -1$ 或 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$
 ① $x=2$ 时 $y \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow \frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow 4a \geq 1$ ② $\Delta > 0$

3. 如图1, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 4$ 交 x 轴于 A, B 两点 (A 在 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 且 $OC = 2OB$.

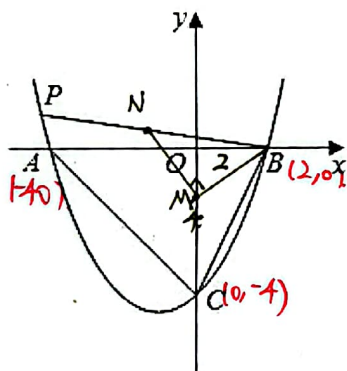


图1

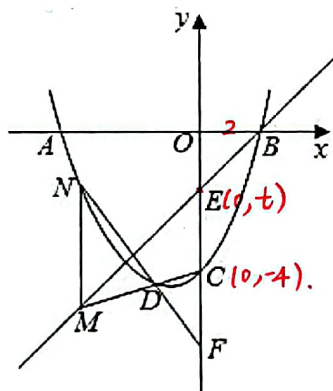


图2

(1) 求抛物线的解析式; $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

(2) 连接 AC, BC , 点 P 在抛物线上, 且满足 $\angle PBC = \angle ACB$, 求点 P 的坐标;

(3) 如图2, 直线 $l: y = x + t$ ($-4 < t < 0$) 交 y 轴于点 E , 过直线 l 上的一动点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交抛物线于点 N , 直线 CM 交抛物线于另一点 D , 直线 DN 交 y 轴于点 F , 试求 $OE + OF$ 的值.

12) 法: 延长 CA, BP 交于点 Q .

由 $\angle PBC = \angle ACB$ 得 $QC = QB$

$AC: y = -x - 4$, $Q(m, -m - 4)$.

代数解法解得 $m = -5$

$Q(-5, 1)$

$QB: y = -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}$

$P(-\frac{30}{7}, \frac{44}{7})$

法: 构造等角得等角

思路: 取 $\angle MBC = \angle OCB$, $M(0, -\frac{3}{2})$.

则 $\angle MBP = 45^\circ$ 过 M 作 $MN \perp MB$

则 $N(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

$\therefore BP: y = -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}$

$P(-\frac{30}{7}, \frac{44}{7})$

(3) 令 $D(m, \frac{1}{2}m^2 + m - 4)$

$C(0, -4)$

$CD: y = (\frac{1}{2}m + 1)x - 4$

与 $y = x + t$ 联列得

$x_N = \frac{2t+8}{m}$

令 $DN: y = mx + n$

与抛物线联列

$\begin{cases} y = mx + n \\ y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{2}x^2 + (1-m)x - n - 4 = 0$

D, N 是两交点,

故 $x_D x_N = -8 - 2n$

$\therefore m \cdot x_N = -8 - 2n$

$\therefore x_N = \frac{-8-2n}{m}$

$\therefore x_M = x_N \therefore 2t + 8 = -8 - 2n$

$\therefore -t - n = 8$

$\therefore OE = -t, OF = -n$

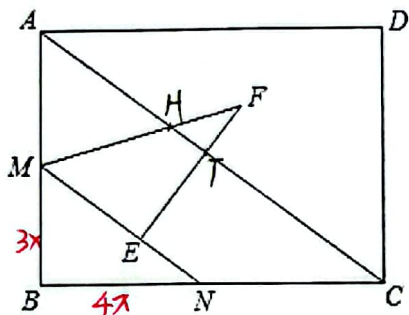
$\therefore OE + OF = 8$

4. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=4$, 点 M, N 分别在 AB, BC 上, $BM=3x$, $BN=4x$ ($0 < x < 1$). 把 $\triangle MBN$ 绕点 M 旋转, 得到 $\triangle MEF$, 点 E 落在线段 MN 上.

(1) 求证: $MN \parallel AC$;

(2) 若点 E 在 $\angle BCA$ 的平分线上, 求 BM 的长; 角平分线的联想点, 你扎实了吗?

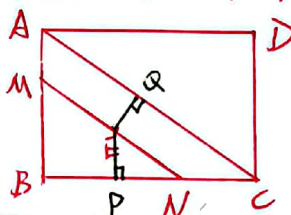
(3) 若 $\triangle MEF$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分图形的周长为 $\frac{23}{5}$, 求 x 的值.



$$(1) \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} \rightarrow MN \parallel AC$$

相似 \rightarrow 角相等 \rightarrow 平行

(2). 过点 E 向 BC 作 $EP \perp BC$, 向 AC 作 $EQ \perp AC$.



$$ME = MB = 3x, BN = 4x$$

$$MN = 5x, EN = 2x.$$

$$EP = \frac{4}{5}x.$$

EQ 为两平行线间距离

$$\therefore EQ = \frac{12}{5} - \frac{12}{5}x$$

角平分线上的点到角两边距离相等.

$\therefore E$ 在 $\angle BCA$ 的角平分线上.

$$\therefore EP = EQ$$

$$\therefore \frac{4}{5}x = \frac{12}{5} - \frac{12}{5}x$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

$$\therefore BM = 3x = 2.$$

另法: 亦可用平行+角平分线 \rightarrow 等腰

$$EN = NC.$$

$$2x = 4 - 4x$$

$$x = \frac{2}{3}, BM = 3x = 2.$$

(3). 当 F 点 AC 上时 (先找临界点).

$$\frac{12}{5} - \frac{12}{5}x = 4x \quad (\text{由(2)得平行线距离可表示为 } \frac{12}{5} - \frac{12}{5}x.)$$

$$x = \frac{3}{8}$$

当 $0 < x \leq \frac{3}{8}$ 时, 重叠部分周长为 $12x$

$$12x = \frac{23}{5} \rightarrow x = \frac{23}{60} > \frac{3}{8} \text{ 故舍去.}$$

当 $\frac{3}{8} < x < 1$ 时, 设 MF, EF 分别交 AC 于 H, T .

$$4x - (\frac{12}{5} - \frac{12}{5}x)$$

$$\frac{FH}{FE} = \frac{FM}{FN} = \frac{HT}{ME}$$

$$FH = 8x - 3$$

$$HT = \frac{24}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$HM = 3 - 3x$$

$$FT = \frac{32}{5}x - \frac{12}{5}$$

$$\therefore \text{重叠部分周长为 } ME + TE + HT + MH = 3x + \frac{12}{5} - \frac{12}{5}x + \frac{24}{5}x - \frac{9}{5} + 3 - 3x = \frac{12}{5}x + \frac{18}{5} = \frac{23}{5}$$

$$\therefore x = \frac{5}{12}$$

