

## 对称图形——圆专题讲义

### 2.8 弧长及扇形的面积

#### 课标知识与能力目标

- 1.掌握弧长和扇形面积的公式.
- 2.会利用弧长公式及扇形面积公式计算组合图形的周长和面积.
- 3.掌握求图形面积的常用方法,如割补法、平移法等.

#### 知识点 1: 弧长公式

在半径为  $R$  的圆中,  $360^\circ$  的圆心角所对的弧长就是圆周长  $C = 2\pi R$ , 所以  $1^\circ$  的圆心角所对的弧长是  $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ , 于是在半径为  $R$  的圆中,  $n^\circ$  的圆心角所对的弧长  $l = \frac{n\pi R}{180}$ .

#### 典型例题

##### 考点 1: 已知圆心角和半径求弧长

例 1 在半径为 12 的  $\odot O$  中,  $60^\circ$  圆心角所对的弧长是 ( )

- A.  $6\pi$                       B.  $4\pi$                       C.  $2\pi$                       D.  $\pi$

例 2 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ , 作  $\triangle ABC$  的外接圆. 若  $\widehat{AB}$  的长为 12 cm, 那

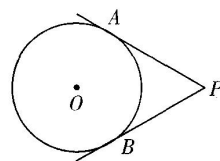
么  $\widehat{AC}$  的长是 ( )

- A. 10 cm                      B. 9 cm                      C. 8 cm                      D. 6 cm

例 3 挂钟的分针长 10 cm, 经过 45 分钟, 它的针尖转过的弧长是 ( )

- A.  $\frac{15}{2}\pi$  cm                      B.  $15\pi$  cm                      C.  $\frac{75}{2}\pi$  cm                      D.  $75\pi$  cm

例 4 如图,  $PA$ 、 $PB$  是  $\odot O$  的切线,  $A$ 、 $B$  是切点,  $\angle P = 60^\circ$ ,  $PA = 6\sqrt{3}$ , 求  $\widehat{AB}$  的长.



##### 考点 2: 已知弧长和半径求圆心角和圆周角

例 1 在半径为 4 cm 的圆中, 弧长为  $\frac{2}{3}\pi$  cm 的弧所对的圆周角的度数是\_\_\_\_\_.

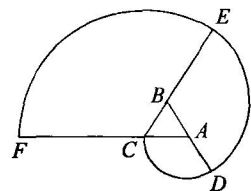
##### 考点 3: 已知弧长和圆心角求半径

例 1 已知一圆弧的圆心角为  $300^\circ$ , 它所对的弧长等于半径为 6 cm 的圆的周长, 求该圆弧所在的圆的半径.

能力提优

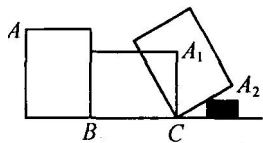
题型：旋转图形求运动路线

**例 1** 如图所示， $\triangle ABC$  为正三角形，曲线 CDEF 叫做“正三角形的渐开线”，其中  $\widehat{CD}$ 、 $\widehat{DE}$ 、 $\widehat{EF}$  的圆心依次按 A、B、C 循环，它们依次相连接，如果  $AB=1$ ，那么曲线 CDEF 的长是 \_\_\_\_\_。



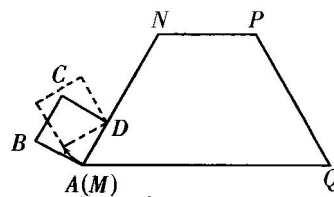
**例 2** 如图，有一长为 4 cm、宽为 3 cm 的长方形木板在桌面上做无滑动的翻滚（顺时针方向），木板上的顶点 A 的位置变化为  $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$ ，其中第二次翻滚被桌面上一小木块挡住，使木板边沿  $A_2C$  与桌面成  $30^\circ$  角，则点 A 翻滚到点  $A_2$  位置时，共走过的路径长为 ( )

- A. 10 cm      B. 3.5 cm      C. 4.5 cm      D. 2.5 cm



**例 3** 如图，等腰梯形 MNPQ 的上底长为 2，腰长为 3，一个底角为  $60^\circ$ 。正方形 ABCD 的边长为 1，它的一边 AD 在 MN 上，且顶点 A 与 M 重合。现将正方形 ABCD 在梯形的外面沿边 MN、NP、PQ 进行翻滚，翻滚到有一个顶点与 Q 重合即停止滚动。

(1)请在所给的图中，用尺规画出点 A 在整个翻滚过程中所经过的路线图；



## 知识点 2：扇形面积公式

一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做扇形.

因为圆的面积为  $\pi R^2$ ，所以  $1^\circ$  的扇形的面积是  $\frac{\pi R^2}{360}$ ，那么圆心角为  $n^\circ$  的扇形的面积为

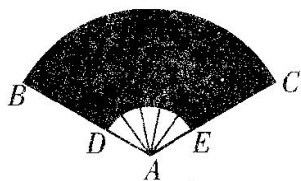
$$S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$$

因为扇形的弧长  $l = \frac{n\pi R}{180}$ ，所以扇形面积还可以表示为  $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR$ .

### 典型例题

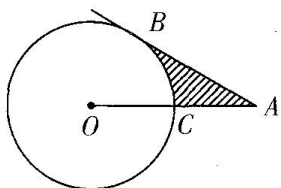
#### 考点 1：已知圆心角和半径求扇形面积

**例 1** 如图，扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB、AC 夹角为  $120^\circ$ ，AB 的长为 30 cm，贴纸部分 BD 的长为 20 cm，求贴纸部分的面积.

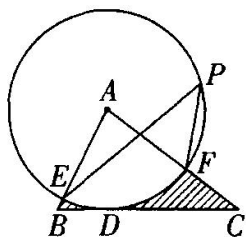


#### 考点 2：利用扇形面积公式求阴影部分面积

**例 1** 如图，A 为  $\odot O$  外一点，OA 交  $\odot O$  于点 C，AB 是  $\odot O$  的切线，B 是切点， $\angle A = 30^\circ$ ， $\widehat{BC}$  的长为  $\frac{4}{3}\pi$ ，求阴影部分的面积.



**例 2** 如图，在  $\triangle ABC$  中， $BC=4$ ，以点 A 为圆心，2 为半径的  $\odot A$  与 BC 相切于点 D，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F，点 P 是  $\odot A$  上一点，且  $\angle EPF=40^\circ$ ，求图中阴影部分的面积.

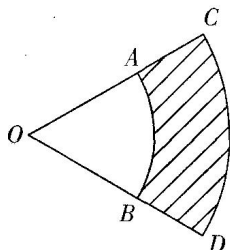


:

### 能力提优

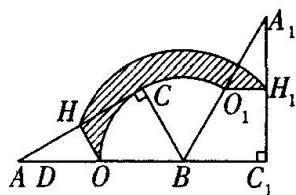
#### 题型 1: 利用扇形面积公式巧求环形面积

例 1 如图, 两同心圆被两条半径截得的  $\widehat{AB}=6\pi\text{ cm}$ ,  $\widehat{CD}=10\pi\text{ cm}$ ,  $AC=12\text{ cm}$ , 求阴影部分 ABDC 的面积.

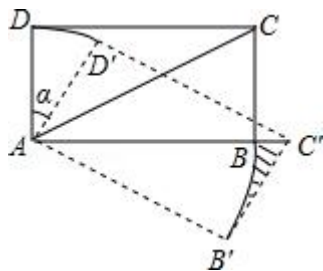


#### 题型 2: 利用旋转图形性质求圆环面积

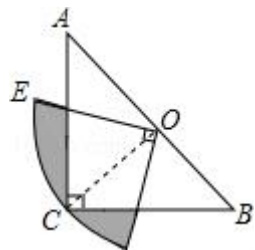
例 1 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $\angle CAB=30^\circ$ ,  $BC=2$ , O、H 分别为边 AB、AC 的中点, 将  $\triangle ABC$  绕点 B 顺时针旋转  $120^\circ$  到  $\triangle A_1B_1C_1$  的位置, 求整个旋转过程中线段 OH 所扫过的部分的面积(即阴影部分面积).



例 2 (2014•江苏盐城) 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=\sqrt{3}$ ,  $AD=1$ , 把该矩形绕点 A 顺时针旋转  $\alpha$  度得矩形  $AB'C'D'$ , 点  $C'$  落在 AB 的延长线上, 求图中阴影部分的面积.



例 3 (2015•辽宁省盘锦) 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $AC=BC$ , 斜边  $AB=2$ ,  $O$  是  $AB$  的中点, 以  $O$  为圆心, 线段  $OC$  的长为半径画圆心角为  $90^\circ$  的扇形  $OEF$ , 弧  $EH$  经过点  $C$ , 求图中阴影部分的面积.



例 4 (2014•莱芜) 如图,  $AB$  为半圆的直径, 且  $AB=4$ , 半圆绕点  $B$  顺时针旋转  $45^\circ$ , 点  $A$  旋转到  $A'$  的位置, 求图中阴影部分的面积.

